**Grantový projekt FRVŠ MŠMT č.1917/2007/F1/a**

# Inovace předmětů studijních programů strojního inženýrství v oblasti teplotního namáhání

## Některé aplikace a ukázky konkrétních řešení tepelného namáhání těles.

**Autorky:** **Ing.Jitka Jágrová, CSc.**
**Doc.Ing.Bohdana Marvalová, CSc.**
**Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti**
**Technická univerzita v Liberci**

**Prosinec 2007**

# 1. Úvod

Tato kapitola se zabývá aplikacemi teplotního namáhání v konstrukčních úlohách. V jednotlivých výpočetních modelech se řeší velikosti napětí a deformací způsobených jednak tím, že u staticky neurčitě uložených těles je při ohřevu (ochlazování) bráněno jejich volné tepelné dilataci, jednak nerovnoměrným ohřevem.

Jednotlivé kapitoly jsou členěny podle typů výpočetních modelů na problematiky tažených (tlačených) tyčí, nosníků, tenkých kruhových ohýbaných desek a kotoučů a dlouhých válců. Řešení je prováděno jednak pomocí deformačních podmínek, jednak s využitím energetických metod (Castiglianova věta), což je vyčleněno v samostatné kapitole.

# 2. Teplotní napětí v tyčích namáhaných na tah nebo tlak

Jestliže teplota tyče délky $l_0$ s kruhovým průřezem $\varnothing d_0$ stoupne z počáteční teploty $T_0$ na konečnou teplotu $T_1$ a tyči nic nebrání ve volné deformaci, tyč se prodlouží o délku $l = l_0 + \alpha(T_1 - T_0)l_0$ a její průměr vzroste na $d = d_0 + \alpha(T_1 - T_0)$, kde $\alpha[\mathrm{K}^{-1}]$ je parametr zvaný lineární teplotní roztažnost. Je to prodloužení tyče jednotkové délky při změně teploty a jeden stupeň.

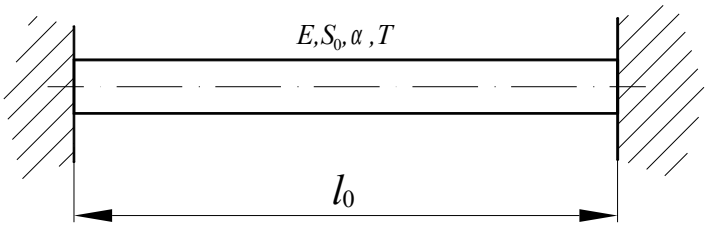
Deformace tyče, která je současně zatížená vnějšími silami a teplotou je dána součtem deformací od vnějších sil a teplotní deformace

$$\varepsilon = \varepsilon_F + \varepsilon_T = \frac{\sigma}{E} + \alpha(T_1 - T_0) = \frac{\sigma}{E} + \alpha T .$$

Tento vztah reprezentuje Hookeův zákon s teplotním členem.

## 2.1 Teplotní napětí ve staticky neurčitě uložené tyči

Zde je bráněno volné tepelné dilataci tyče z důvodu jejího staticky neurčitého uložení dle obr. 2.1.




Obr. 2.1

Vetknutá tyč délky $l_0$, s průřezem $S_0$, modulem pružnosti *E* a součinitelem teplotní roztažnosti $\alpha$ je podrobena teplotní změně $T = T_1 - T_0$. Kdyby nic nebránilo její teplotní deformaci, prodloužila by se o délku

$$\Delta l = \alpha T l_0 .$$

Tomuto prodloužení však brání oboustranné vetknutí. V tyči vznikne tlakové napětí, které eliminuje toto prodloužení

$$\varepsilon_T = \frac{\alpha T l_0}{l_0} = \alpha T , \quad \varepsilon_F = \frac{\sigma}{E} ,$$

$$\varepsilon = \varepsilon_F + \varepsilon_T = 0 ,$$

po dosazení

$$\frac{\sigma}{E} + \alpha T = 0 \quad \Rightarrow \sigma = -\alpha T E .$$

*Příklad 1.*

Ocelová kolejnice nekonečné délky se ochladí z počáteční teploty $T_0$, při které byla bez napětí, o teplotu $T = 30\,\mathrm{K}$. Jaké napětí vznikne v kolejnici, je-li $E = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}$, $\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$?

*Řešení*: Kolejnici můžeme považovat za ideálně vetknutou tyč. Při ochlazení v ní vznikne tahové napětí, které eliminuje teplotní deformaci $\varepsilon_T = -\alpha T = -3{,}6 \cdot 10^{-4}$.

$$\varepsilon = \varepsilon_F + \varepsilon_T = 0$$

$$\frac{\sigma}{E} - \alpha T = 0$$

$$\sigma = E \alpha T = 72\,\mathrm{MPa}$$

*Příklad 2.*

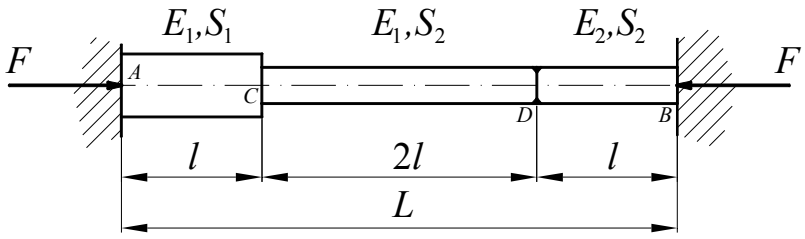
Tyč sestavená ze dvou materiálů podle obr. 2.2 o teplotní roztažnosti: $\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$, $\alpha_2 = 16 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$ je oboustranně vetknutá. Vypočtěte napětí v jejích jednotlivých částech, je-li $E_1 = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}$, $E_2 = 1{,}2 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}$, $S_1 = 1{,}5 S_2$, $S_2 = 16\,\mathrm{cm}^2$, ohřeje-li se celá o $T = 5\,\mathrm{K}$.

*Řešení:* Deformační podmínka pro výpočet síly *F* je:

$$\Delta L_F + \Delta L_T = 0 ,$$

tedy

$$\frac{F\,l}{E_1 S_1}+\frac{F\,l}{E_1 S_2}+\frac{F\,l}{E_2 S_2}-\Delta T(\alpha_1 3\,l+\alpha_2 l)=0\ .$$




Obr. 2.2

Odtud tlaková síla v tyči má velikost:

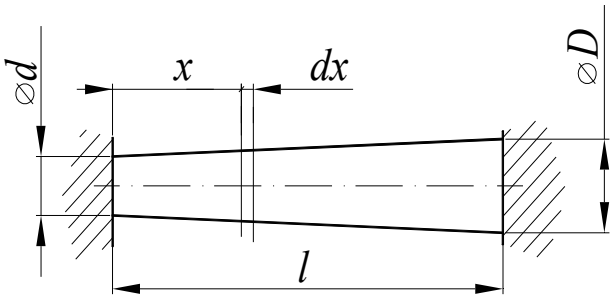
$$F=\frac{\Delta t(3\,\alpha_1+\alpha_2)E_1 E_2 S_1 S_2}{E_2 S_2+2\,E_2 S_1+E_1 S_1}=0{,}202\,\mathrm{MN}\ .$$

Napětí v části $\bar{AC}$ je: $\sigma_1=\frac{F}{S_1}=84\,\mathrm{MPa}$ .

Napětí v části $\bar{CD}$ a $\bar{DB}$ : $\sigma_2=\frac{F}{S_2}=126\,\mathrm{MPa}$ .

*Příklad 3.*

Tyč ve tvaru konického kužele podle obr. 2.3 je vetknutá a zatížená změnou teploty $T=40\,\mathrm{K}$ . Vypočtěte napětí v tyči. Dáno: $l=500\,\mathrm{mm}$ , $\varnothing D=50\,\mathrm{mm}$ , $\varnothing d=20\,\mathrm{mm}$ , $E=2\cdot 10^5\,\mathrm{MPa}$ , $\alpha=12\cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$ .




Obr. 2.3

*Řešení:* Kdyby tyč byla volná, prodloužila by se vlivem teploty o $\Delta l = \alpha T l$. V tyči vznikne tlakové napětí, které eliminuje toto prodloužení. Předpokládejme, že ve vetknutí vznikne reakce $F$, pak v místě vzdáleném o $x$ od levého vetknutí bude napětí

$$\sigma(x) = \frac{F}{S(x)},$$

kde průřez

$$S(x) = \frac{\pi}{4} d^2(x) = \frac{\pi}{4}\left[ d + (D-d)\frac{x}{l} \right]^2.$$

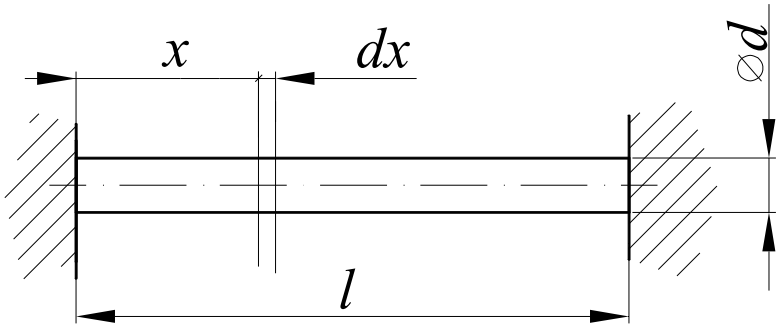
Deformace v místě $x$ bude $\varepsilon_F(x) = \frac{\sigma(x)}{E}$ a zkrácení elementu $dx$ bude $\Delta(dx) = \varepsilon_F(x)\,dx$. Zkrácení tyče vlivem napětí musí být stejné, jako její prodloužení vlivem teploty.

$$\alpha T l = \int_0^l \varepsilon_F(x)\,dx = \frac{4 F l}{E \pi d D}$$

Z této rovnice vypočteme velikost tlakové síly $F = 75{,}4\,\mathrm{kN}$ a maximální napětí na levém konci tyče $\sigma = 240\,\mathrm{MPa}$.

## 2.2 Nerovnoměrné rozložení teploty

Mějme vetknutou tyč konstantního průřezu podle obr 2.4, změna teploty $T(x)$ bude nyní funkcí souřadnice $x$.




Obr. 2.4

Volné teplotní prodloužení elementu $dx$ v místě $x$ bude

$$\Delta(dx)_T = \alpha T(x)dx ,$$

celkové volné prodloužení tyče vlivem teploty pak je

$$\Delta l_T = \int_0^l \alpha T(x)dx .$$

Ve vetknutích vznikne tlaková síla *F*, která by zkrátila tyč o

$$\Delta l_F = \frac{F l}{E S} .$$

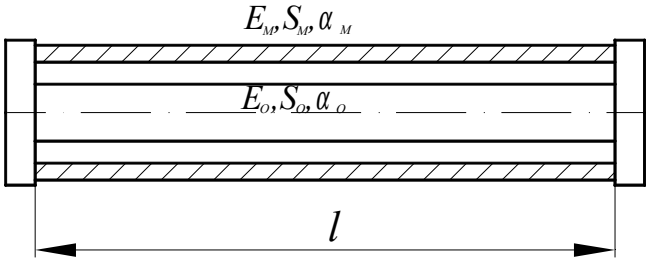
Prodloužení tyče od teploty a zkrácení vlivem reakce musí být stejné, sílu *F* vypočteme z této podmínky

$$\frac{F l}{E S} = \int_0^l \alpha T(x)dx .$$

## 2.3 Soustavy tyčí

*Příklad 4.*

Ocelová tyč a měděná trubka stejné délky jsou spojeny tuhými čely podle obr. 2.5. Jaké napětí vznikne v jednotlivých částech, ohřejeme-li soustavu o teplotu *T*?




Obr. 2.5

*Řešení:* Teplotní roztažnost mědi je větší než teplotní roztažnost oceli ( $\alpha_M = 16 \cdot 10^{-6} \mathrm{K}^{-1}$ , $\alpha_O = 12 \cdot 10^{-6} \mathrm{K}^{-1}$ ). Prodloužení obou částí však musí být stejné. V trubce vznikne tlakové a v tyči tahové napětí. Deformační podmínka je

$$\alpha_M T\, l - \frac{\sigma_M}{E_M} l = \alpha_O T\, l + \frac{\sigma_O}{E_O} l\,.$$

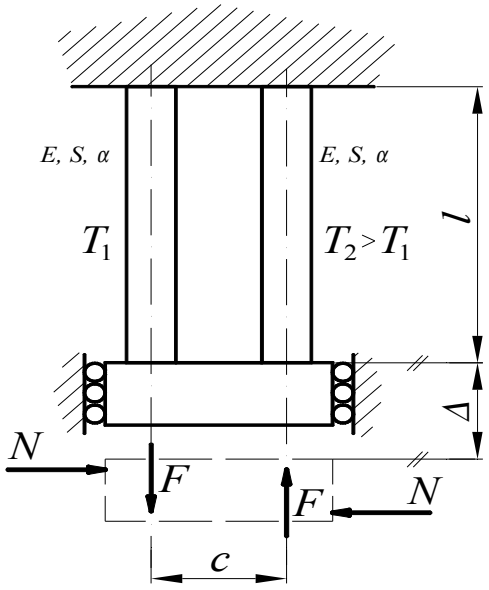
Výsledné síly, kterými trubka a tyč působí na tuhá čela musí být stejně velké, ale opačného smyslu

$$\sigma_M S_M = \sigma_O S_O\,.$$

Z této podmínky rovnováhy a deformační podmínky, můžeme vypočítat napětí $\sigma_O$ a $\sigma_M$.

*Příklad 5.*

Dvě stejné tyče jsou spojeny tuhým členem podle obr. 2.6 a každá je celá ohřáta o jinou teplotu ( $T_1$ , $T_2$ ). Jaké napětí vznikne v tyčích, jestliže tuhé čelo se nemůže natočit?




Obr. 2.6

*Řešení:* Po ohřátí tyčí bude čelo v pozici rovnoběžné s původní pozicí a posune se ve směru dolů o vzdálenost $\Delta$ , která je rovna prodloužení tyčí. Na tyče působí osové síly *F*, jejichž moment $F \cdot c$ je v rovnováze s momentem sil *N*, které vznikají ve vedení. Z podmínky stejné délky tyčí po ohřátí

$$\alpha T_1 l + \frac{F l}{S E} = \alpha T_2 l - \frac{F l}{S E}$$

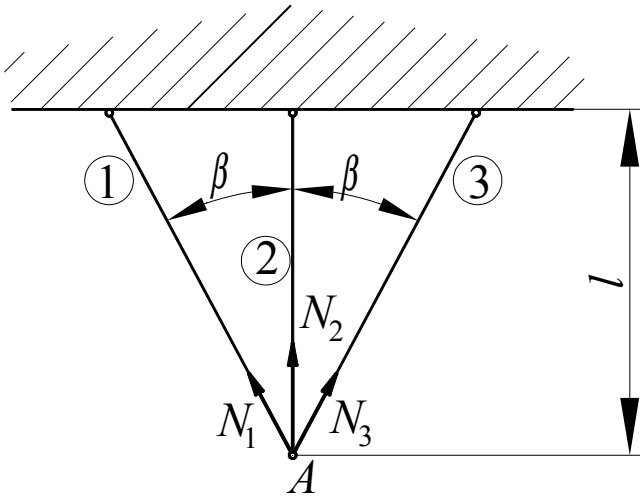
vypočteme sílu *F*

$$F = \frac{\alpha (T_2 - T_1) S E}{2}\,.$$

*Příklad 6.*

Všechny pruty soustavy podle obr. 2.7 jsou ze stejného materiálu a mají stejný průřez. Jaké bude v jednotlivých prutech napětí, ohřeje-li se a) celá soustava o $T$.

b) ohřeje-li se pouze prut 2 o $T$




Obr. 2.7

Soustava je symetrická a $1\times$ staticky neurčitá, tedy

$$N_1 = N_3 .$$

Rovnice rovnováhy styčníku $A$ je

$$2 N_1 \cos\beta + N_2 = 0 .$$

Po deformaci styčník $A$ zůstane na ose symetrie a deformační podmínka má tvar

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos\beta .$$

a) prodloužení prutů jsou

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l}{E S} + \alpha T l ,$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = \frac{N_1 l}{E S \cos\beta} + \frac{\alpha T l}{\cos\beta} .$$

Z deformační podmínky

$$\frac{N_1 l}{E S \cos^2\beta} + \frac{\alpha T l}{\cos^2\beta} = \frac{N_2 l}{E S} + \alpha T l$$

a z rovnice rovnováhy vyjde

$$N_1 = -\frac{\alpha T E S (1-\cos^2\beta)}{1+2\cos^3\beta}\ ,\quad N_2 = \frac{2\alpha T E S (1-\cos^2\beta)\cos\beta}{1+2\cos^3\beta}\ ,$$

resp. $\sigma_1 = \frac{N_1}{S}$ , $\sigma_2 = \frac{N_2}{S}$ .

b) Soustava je stále symetrická, prodloužení prutů jsou

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l}{E S} + \alpha T l\ ,$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = \frac{N_1 l}{E S \cos\beta}\ .$$

Z deformační podmínky

$$\frac{N_1 l}{E S \cos\beta} = \frac{N_2 l \cos\beta}{E S} + \alpha T l \cos\beta$$

a z rovnice rovnováhy vyjde

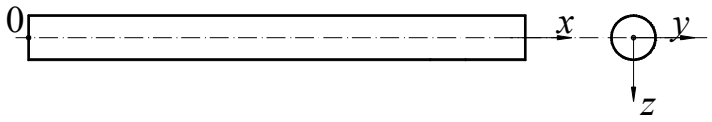
$$N_1 = \frac{\alpha T E S \cos^2\beta}{1+2\cos^3\beta}\ ,\quad N_2 = -\frac{2\alpha T E S \cos^3\beta}{1+2\cos^3\beta}\ ,$$

resp. $\sigma_1 = \frac{N_1}{S}$ , $\sigma_2 = \frac{N_2}{S}$ .

# 3. Přibližný výpočet teplotních napětí v nosnících

## 3.1 Úvod

Předpokládejme, že nosník je staticky určitý a nezatíženy vnějšími silami a momenty. Má konstantní průřez a osy *y* a *z* jsou hlavními centrálními osami (obr. 3.1).




Obr. 3.1

Předpokládejme dále, že přírůstek teploty $T(x,z)$ je libovolnou funkcí souřadnic *x* a *z*. Podle Bernoulliho hypotézy zůstávají průřezy nosníku rovinné po deformaci, posuv *u* ve směru osy *x* musí být tedy lineární funkcí souřadnice *z*, např. ve tvaru

$$u(x,z)=f_0(x)+z\,f_1(x)\,.$$

Potom deformace je

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f_0}{\partial x}+z\,\frac{\partial f_1}{\partial x}\,.$$

Předpokládejme, že v nosníku vzniká osové napětí $\sigma_x$ a z Hookova zákona platí

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}+\alpha T(x,z)\,,$$

$$\sigma_x=E\,\varepsilon_x-E\,\alpha T(x,z)=E\left[f_0'(x)+z\,f_1'(x)-\alpha T(x,z)\right].$$

Z podmínek rovnováhy mezi vnějšími a vnitřními silami plyne, že výsledná síla ve směru osy *x* musí být nulová

$$\int_{(S)}\sigma_x\,dS=0\,,$$

a rovněž výsledné momenty vzhledem k osám *y* a *z* musí být rovny nule

$$\int_{(S)} \sigma_x \, y \, dS = 0 \,, \quad \int_{(S)} \sigma_x \, z \, dS = 0 \,,$$

kde integrujeme přes celý průřez *S*.

Z těchto podmínek určíme funkce $f_0'(x)$ a $f_1'(x)$.

Po dosazení

$$\int_{(S)} E\left[ f_0'(x) + z\, f_1'(x) - \alpha\, T(x,z) \right] dS = E\, f_0'(x)\, S + E\, f_1'(x) \int_{(S)} z\, dS - \int_{(S)} E\, \alpha\, T(x,z)\, dS = 0 \,,$$

$$E\, f_0'(x) \int_{(S)} y\, dS + E\, f_1'(x) \int_{(S)} y\, z\, dS - \int_{(S)} E\, \alpha\, T(x,z)\, y\, dS = 0 \,,$$

$$E\, f_0'(x) \int_{(S)} z\, dS + E\, f_1'(x) \int_{(S)} z^2\, dS - \int_{(S)} E\, \alpha\, T(x,z)\, z\, dS = 0 \,.$$

Za předpokladu, že osy *y* a *z* jsou hlavní centrální osy, bude platit

$$\int_{(S)} y\, dS = \int_{(S)} z\, dS = 0 \,,$$

$$I_{yz} = \int_{(S)} y\, z\, dS = 0 \,, \quad I_y = \int_{(S)} z^2\, dS \,.$$

Označme

$$\int_{(S)} E\, \alpha\, T(x,z)\, dS = F_T \,,$$

$$\int_{(S)} E\, \alpha\, T(x,z)\, z\, dS = M_T \,,$$

potom vypočteme

$$f_0'(x) = \frac{1}{E\, S} F_T \,,$$

$$f_1'(x) = \frac{1}{E\, I_y} M_T$$

a napětí v nosníku je

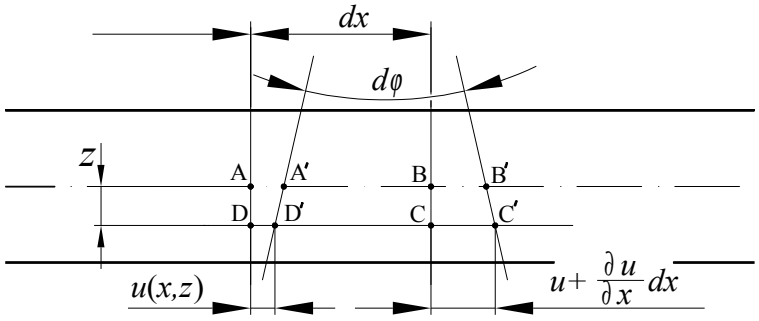
$$\sigma_x(x,z) = \frac{1}{S} F_T + \frac{1}{I_y} M_T\, z - \alpha\, E\, T(x,z) \,.$$

Osový posuv *u* vzhledem k počátku $x = 0$ dostaneme integrací $\varepsilon_x$

$$u(x,z)=\frac{1}{E}\int_0^x \sigma_x\,dx=\frac{1}{E}\int_0^x\left[\frac{F_T}{S}+\frac{M_T}{I_y}z-\alpha\,E\,T(x,z)\right]dx$$

Střední posuv $\bar{u}$ ve směru osy $x$ nosníku bude

$$\bar{u}(x)=\frac{1}{S}\int_{(S)} u(x,z)\,dS=\frac{1}{E}\int_0^x \frac{F_T}{S}\,dx\,.$$




Obr. 3.2

Natočení $d\,\varphi$ mezi dvěma soumeznými řezy je

$$d\,\varphi=\frac{1}{z}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\substack{x=x\\z=z}}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\substack{x=x\\z=0}}\right]dx=\frac{1}{z}\,\frac{M_T}{E\,I_y}\,z\,dx\,.$$

a křivost je

$$\frac{1}{r}=\frac{d\,\varphi}{d\,x}=\frac{M_T}{E\,I_y}=\frac{-d^2w}{d\,x^2}\,.$$

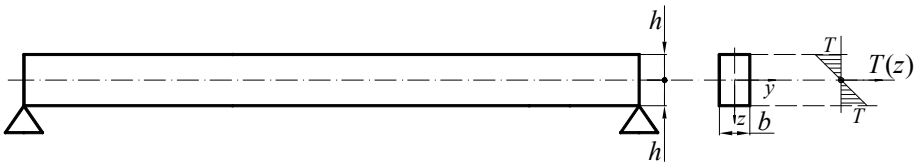
Tedy diferenciální rovnice průhybové čáry má tvar

$$\frac{d^2w}{d\,x^2}=-\frac{M_T}{E\,I_y}\,.$$

## 3.2 Příklady

*Příklad 1.*

Tyč obdélníkového průřezu podle obr. 3.3 je zatížena přírůstkem teploty, který má lineární průběh v závislosti na souřadnici *z*: $T(z)=\frac{T}{h}z$ . *Dáno:* $T$, $\alpha$, $E$, $h$, $b$. Určete napětí v tyči a deformaci tyče.




Obr. 3.3

*Řešení:*

$$\sigma_x(z)=\frac{1}{S}F_T+\frac{1}{I_y}M_T z-\alpha E T(z)\,,$$

$$F_T=\int_{(S)} E\,\alpha T(z)\,dS=\int_{(S)} E\,\alpha\frac{T}{h}z\,dS=0\,,$$

$$M_T=\int_{(S)} E\,\alpha T(z)\,z\,dS=\int_{(S)} E\,\alpha\frac{T}{h}z^2\,dS=E\,\alpha\frac{T}{h}I_y\,,$$

$$\sigma_x(z)=\frac{1}{I_y}E\,\alpha\frac{T}{h}I_y z-\alpha E\frac{T}{h}z=0\,.$$

V tyči nevznikne napětí (přírůstek teploty je lineární funkcí souřadnice *z*).

Diferenciální rovnice průhybové čáry

$$\frac{d^2 w}{d x^2} = -\frac{M_T}{E I_y},$$

$$\frac{d^2 w}{d x^2} = -\alpha \frac{T}{h} = -\frac{1}{r}.$$

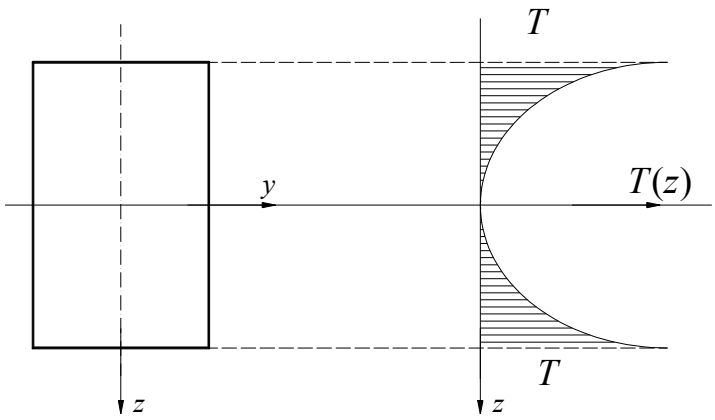
Průhybová čára je kružnice s poloměrem $r = \frac{h}{\alpha T}$. Tyč se neprodlouží, neboť střední posuv průřezu je nulový:

$$u(x, z) = \int_0^x \left[ \sigma_x \frac{(\xi, z)}{E} + \alpha T(z) \right] d\xi = \frac{\alpha T}{h} z x,$$

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{S} \int_{(S)} u(x, z)\, dS = \frac{x}{S} \int_{(S)} \frac{\alpha T}{h} z\, dS = 0.$$

*Příklad 2.*

Tyč z příkladu 1. je zatížena přírůstkem teploty, který má parabolický průběh (obr. 3.4) v závislosti na souřadnici *z*, určete napětí v tyči a její deformaci.




Obr. 3.4

*Řešení:*

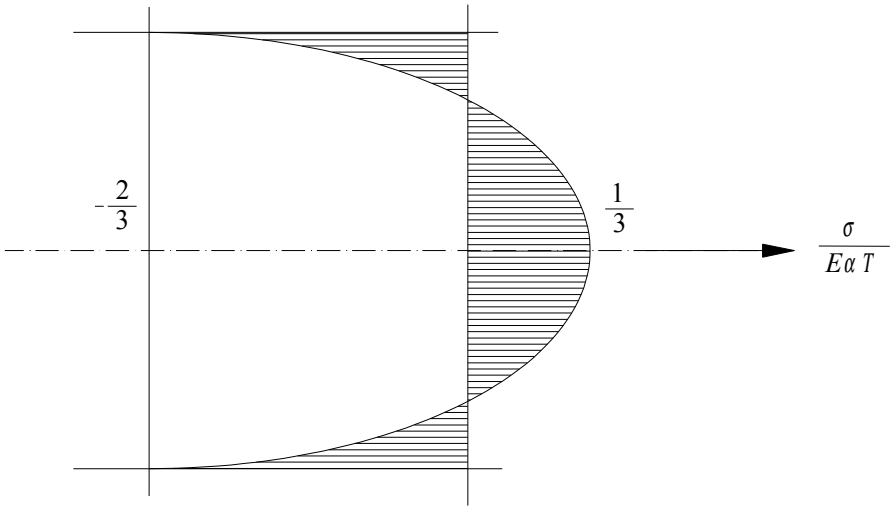
$$T(z) = T \left( \frac{z}{h} \right)^2,$$

$$F_T = \int_{(S)} \alpha E T(z) dS = \alpha E T \frac{I_y}{h^2},$$

$$M_T = \int_{(S)} \alpha E T(z)\, z\, dS = 0 ,$$

$$\sigma_x(z) = \frac{F_T}{S} - \alpha E T(z) = \alpha E T \left[ \frac{I_y}{S h^2} - \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] = \alpha E T \left[ \frac{1}{3} - \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] .$$

Napětí má parabolický průběh (obr. 3.5). Tyč se neprohne, protože $M_T = 0$ .




Obr. 3.5

Osový posuv v místě *x*

$$u(x, z) = \int_0^x \left[ \frac{\sigma_x}{E} + \alpha T(z) \right] dx ,$$

střední osový posuv

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{S} \int_{(S)} u(x, z)\, dS = \frac{1}{E} \int_{(S)} \frac{F_T}{S}\, dx = \alpha T \frac{1}{3} x$$

a celkové prodloužení tyče

$$\Delta l = \alpha T \frac{1}{3} l .$$

*Příklad 3.*

Tyč z příkladu 1. je zatížena přírůstkem teploty s parabolickým průběhem podle obr. 3.6. Určete napětí v tyči a její průhyb.

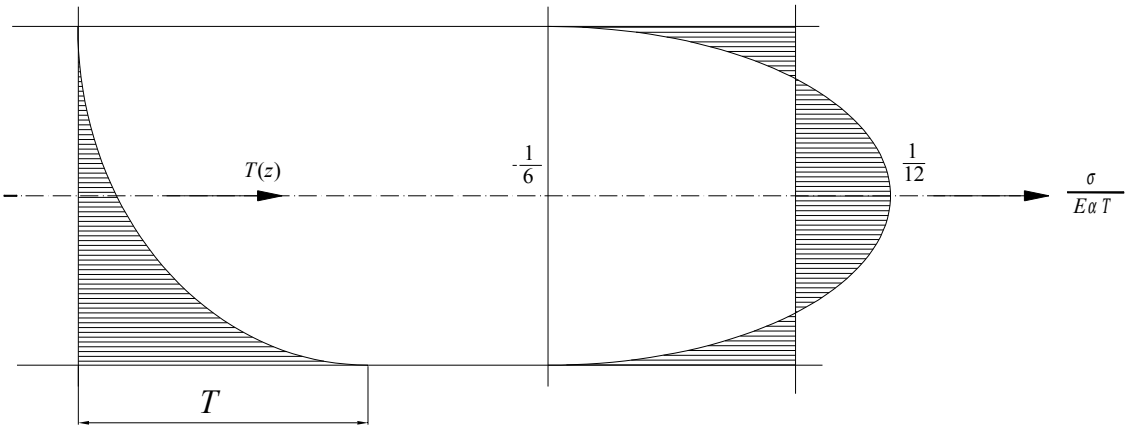
*Řešení:*

$$T(z)=\frac{T}{4}\left(1+\frac{z}{h}\right)^2,$$

$$F_T=\alpha T E\frac{1}{4}\left(S+\frac{I_y}{h^2}\right),$$

$$M_T=\alpha T E\frac{1}{4}\left(2\frac{I_y}{h}\right),$$

$$\sigma_x=\frac{F_T}{S}+\frac{M_T}{I_y}z-\alpha E T(z)=\alpha T E\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{h}\right)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{z}{h}\right)^2\right].$$




Obr. 3.6

Průhyb nosníku je dán diferenciální rovnicí

$$\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{M_T}{E I_y}$$

a po dosazení

$$\frac{d^2 w}{d x^2} = -\frac{1}{2} \alpha \frac{T}{h} .$$

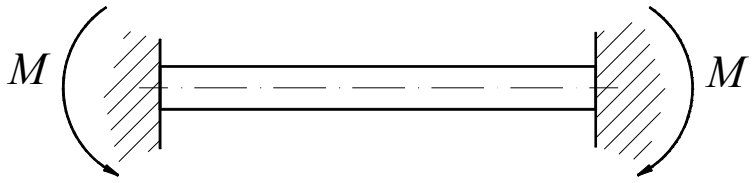
Průhybová čára tedy bude kružnice o poloměru $r = \frac{2h}{\alpha T}$ .

*Příklad 4.*

Tyč z příkladu 1. je vetknutá na obou koncích podle obr. 3.7 a zatížena přírůstkem teploty

$$T(z) = \frac{T}{h} z .$$

Jaké napětí vznikne v tyči a jaká bude její deformace?




Obr. 3.7

*Řešení:* Tyč se neprohne, neboť z vetknutí se na ni budou přenášet ohybové momenty $M = M_T$. Napětí, které vznikne v tyči má lineární průběh

$$\sigma_x = \frac{M_T}{I_y} z = -E \alpha T \frac{z}{h} .$$

*Příklad 5.*

Tyč z příkladu 1. je vetknutá na levém konci a na pravém konci prostě podepřena. Průběh přírůstku teploty je lineární funkcí souřadnice *z*. Určete napětí a deformaci tyče.

*Řešení:*

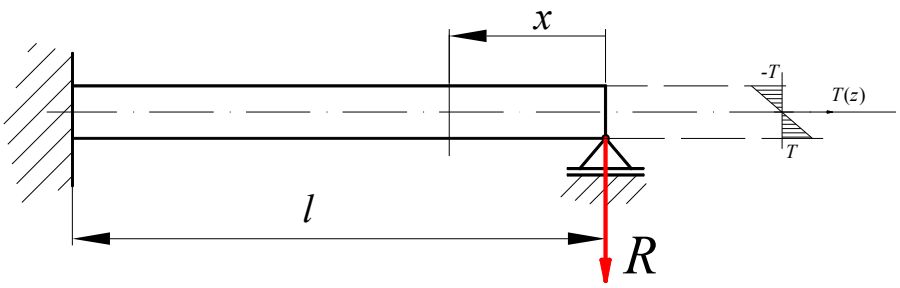
Stále pro průběh teploty platí

$$T(z) = T \frac{z}{h} .$$

V podpoře vznikne reakce *R*, která bude bránit průhybu nosníku směrem vzhůru. Moment v

obecném řezu je

$$M(x)=M_T-Rx\,,$$




Obr. 3.8

diferenciální rovnice má tvar

$$\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{M_T-Rx}{EI_y}$$

a řešení

$$\frac{dw}{dx}=-\frac{1}{EI_y}\left(M_Tx-R\frac{x^2}{2}+C_1\right),$$

$$w(x)=-\frac{1}{EI_y}\left(M_T\frac{x^2}{2}-R\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2\right).$$

Velikost reakce $R$ a konstant $C_1$ a $C_2$ určíme z okrajových podmínek pro deformaci nosníku

$$w(0)=0 \qquad \Rightarrow C_2=0\,,$$

$$w(l)=0 \qquad \Rightarrow M_T\frac{l^2}{2}-R\frac{l^3}{6}+C_1l=0\,,$$

$$w'(l)=0 \qquad \Rightarrow M_Tl-R\frac{l^2}{2}+C_1=0\,.$$

Odtud

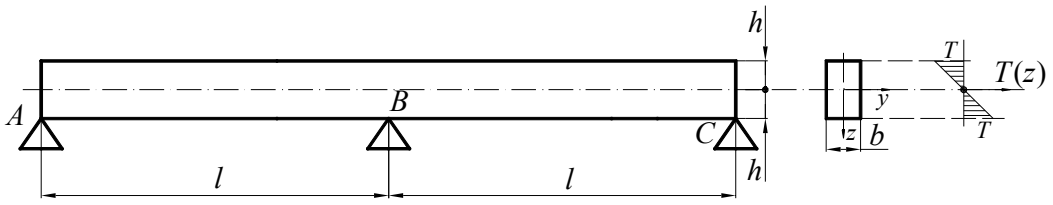
$$R=\frac{3}{2}\frac{M_T}{l},$$

$$C_1=-\frac{1}{4}M_Tl\,.$$

Napětí v nosníku získáme superpozicí napětí v nosníku vetknutém na levém konci a zatíženém ohřevem (napětí nevzniká) a nosníku vetknutém na levém konci a na pravém konci zatíženém silou *R*. (Maximální napětí je ve vetknutí $\sigma_{max}=\frac{R\,l}{W_o}$ )

*Příklad 6.*

Nosník na třech podporách obdélníkového průřezu podle obr. 3.9 je zatížen přírůstkem teploty $T(z)=T\frac{z}{h}$ . Určete napětí a deformaci nosníku.




Obr. 3.9

*Řešení:* Pokud je nosník uložen na dvou podporách A a C, napětí v něm nevznikne a vlivem přírůstku teploty se prohne do kružnice. Poloměr kružnice

$$\frac{1}{r}=\frac{M_T}{E\,I_y},$$

kde

$$M_T=\int_{(S)} E\,\alpha\,T(z)\,z\,dS=E\,\alpha\,T\,I_y,$$

tedy

$$\frac{1}{r}=\frac{\alpha T}{h}\ .$$

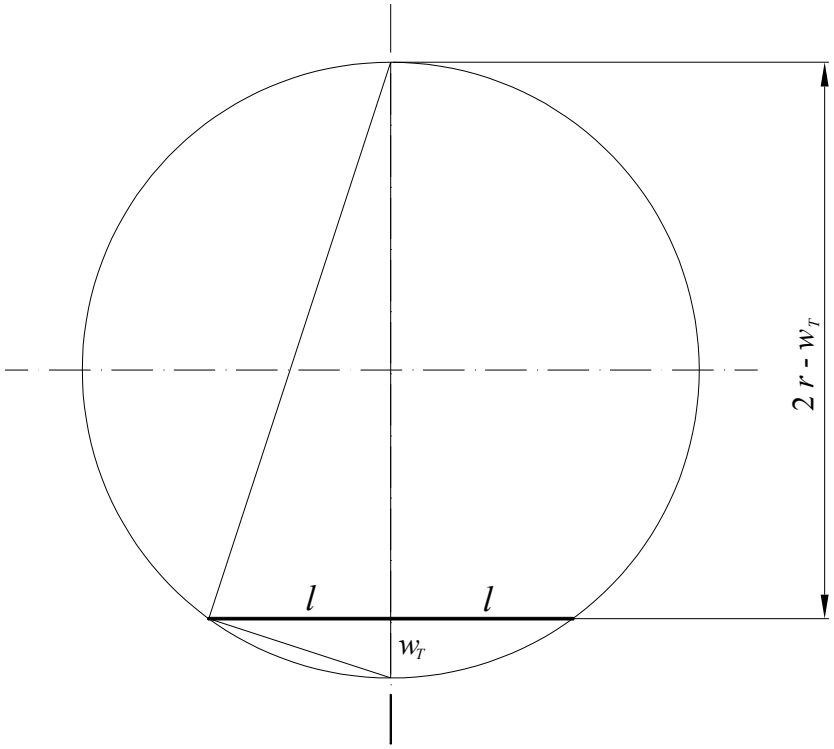
Průhyb způsobený změnou teploty vypočteme pomocí obr. 3.10

$$(2r-w_T)w_T=l^2\ .$$

Protože platí, že $w_T \ll 2r$, lze napsat

$$2r w_T=l^2\ ,$$

$$w_T=\frac{l^2}{2r}=\frac{\alpha T}{2h}l^2\ .$$



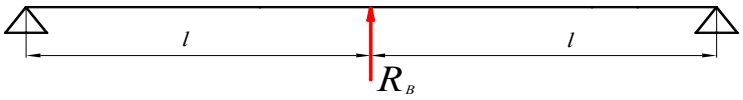

Obr. 3.10

Pro nosník zatížený silou rovnou reakci $R_B$ uprostřed je průhyb (obr. 3.11)

$$w_R=-\frac{R_B(2l)^3}{48 E I_y}\ .$$

Z podmínky $w_T+w_R=0$ vyjde $R_B=3 E I_y \frac{\alpha T}{h l}$.

Maximální napětí je uprostřed nosníku: $\sigma_{max}=\frac{R_B l}{2W_o}$. Průhyb bude stejný jako u nosníku v příkladu 5. Reakce $R_B$ je dvojnásobkem reakce $R$ z příkladu 5.




Obr. 3.11

*Příklad 7.*

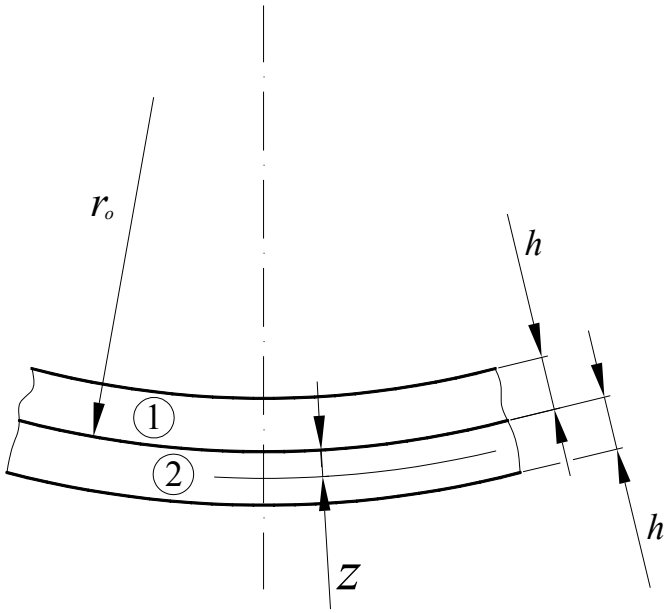
Mějme kompozitní nosník - tzv. bimetal - složený ze dvou částí z různých materiálů podle obr. 3.12. Určeme napětí a deformaci, ohřeje-li se celý nosník o teplotu *T*. Předpokládejme stejný průřez obou částí, moduly pružnosti $E_1$, $E_2$ a součinitele teplotní roztažnosti $\alpha_1$ a $\alpha_2$.

Obr. 3.12

*Řešení:* Po zahřátí se nosník prohne, průhybová čára bude kružnice. Předpokládejme, že zakřivení společné plochy bude $r_o$, dále předpokládejme, že vlivem ohřátí se společná plocha roztáhne v osovém směru o $\varepsilon_o$.

Ve vzdálenosti *z* od této plochy bude osové prodloužení rovno (obr. 3.13)

$$\varepsilon_x = \varepsilon_o + \frac{z}{r_o}.$$




Obr. 3.13

Osové prodloužení v jednotlivých částech nosníku bude

$$\varepsilon_{x1}=\alpha_1 T+\frac{\sigma_{x1}}{E_1},$$

$$\varepsilon_{x2}=\alpha_2 T+\frac{\sigma_{x2}}{E_2},$$

dosadíme-li do levé strany těchto rovnic za $\varepsilon_x$ máme pro napětí vztahy

$$\sigma_{x1}=E_1\left(\varepsilon_o+\frac{z}{r_o}-\alpha_1 T\right),$$

$$\sigma_{x2}=E_2\left(\varepsilon_o+\frac{z}{r_o}-\alpha_2 T\right).$$

Z podmínky rovnováhy sil v průřezu vyjde:

$$\int_{(S)}\sigma_x\,dS=0\ \Rightarrow b\int_{-h}^{0}\sigma_{x1}\,dz+b\int_{0}^{h}\sigma_{x2}\,dz=0\,.$$

Z podmínky rovnováhy momentů vyjde

$$\int_{(S)}\sigma_x\,z\,dS=0\ \Rightarrow b\int_{-h}^{0}\sigma_{x1}\,z\,dz+b\int_{0}^{h}\sigma_{x2}\,z\,dz=0\,.$$

Do rovnic dosadíme vztahy pro napětí.

$$b\,E_1\left(\varepsilon_o h-\frac{1}{r_o}\frac{1}{2}h^2-\alpha_1 T\,h\right)+b\,E_2\left(\varepsilon_o h+\frac{1}{r_o}\frac{1}{2}h^2-\alpha_2 T\,h\right)=0$$

$$b\,E_1\left(-\varepsilon_o\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{r_o}\frac{1}{3}h^3+\alpha_1 T\frac{1}{2}h^2\right)+b\,E_2\left(\varepsilon_o\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{r_o}\frac{1}{3}h^3-\alpha_2 T\frac{1}{2}h^2\right)=0$$

Z těchto rovnic vyjádříme prodloužení $\varepsilon_o$ a zakřivení $\frac{1}{r_o}$ společné plochy a po dosazení do vztahů pro napětí získáme napětí v každé části bimetalu.

Průhyb bimetalu závisí slabě na poměru $\frac{E_2}{E_1}$, avšak je silně ovlivněn rozdílem teplotních roztažností $\alpha_1$ a $\alpha_2$. Položíme-li přibližně $\frac{E_2}{E_1}$=1, pak dostáváme

$$\varepsilon_o \cong T\,\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2},$$

$$\frac{1}{r_o}\cong\frac{3}{4}T(\alpha_2-\alpha_1)\frac{1}{h}.$$

a napětí budou

$$\sigma_{x1}=E_1 T(\alpha_2-\alpha_1)\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\frac{z}{h}\right)\quad \text{pro } z\in\langle -h,0\rangle,$$

$$\sigma_{x2}=E_2 T(\alpha_2-\alpha_1)\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\frac{z}{h}\right)\quad \text{pro } z\in\langle 0,h\rangle.$$

# 4. Užití Castiglianovy věty pro výpočet teplotních napětí

## 4.1 Úvod

Podle Castiglianovy - Ménebréovy věty platí:

$$\frac{\partial U^*}{\partial R}=0\,,$$

kde $U^*$ je doplňková deformační energie a $R$ je zobecněná staticky neurčitá síla. V lineární pružnosti bez teplotního zatížení je $U^*=U$, avšak v případě teplotního zatížení je doplňková měrná energie

$$\lambda^*=\lambda+\alpha(T-T_0)(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\,,$$

kde

$$\lambda=\frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-2\mu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)\right]+\frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{zx}^2\right)$$

je hustota deformační energie. V případě jednoosé napjatosti platí

$$\lambda=\frac{\sigma^2}{2E}\,,$$

$$\lambda^*=\frac{\sigma^2}{2E}+\alpha\,\Delta T\,\sigma=\lambda+\alpha\,\Delta T\,\sigma\,.$$

## 4.2 Příklady

*Příklad 1.*

Prutová soustava tvořená třemi pruty (obr. 2.7) je ze stejného materiálu ( $E$ , $\alpha$ ) a stejného průřezu *S*. Určete jaká napětí vzniknou v prutech po zahřátí prutové soustavy o teplotu $\Delta T$. Soustava je opět symetrická. Výpočet pomocí deformační podmínky je uveden v kapitole 2.4, příklad 6.

Doplňková deformační energie soustavy

$$U^* = 2\left(\frac{\sigma_1^2}{2E} + \alpha \Delta T \sigma_1\right) S \frac{l}{\cos\beta} + \left(\frac{\sigma_2^2}{2E} + \alpha \Delta T \sigma_2\right) S l =$$
$$= 2\left(\frac{N_1^2}{2ES} + \alpha \Delta T N_1\right) \frac{l}{\cos\beta} + \left(\frac{N_2^2}{2ES} + \alpha \Delta T N_2\right) l .$$

Podmínka rovnováhy je $2N_1 \cos\beta + N_2 = 0$.

Zvolme $N_2$ za staticky neurčitou sílu, pak platí $\frac{\partial U^*}{\partial N_2} = 0$.

$$\frac{\partial U^*}{\partial N_2} = 2\left(\frac{2N_1 \frac{\partial N_1}{\partial N_2}}{2ES} + \alpha \Delta T \frac{\partial N_1}{\partial N_2}\right) \frac{l}{\cos\beta} + \left(\frac{2N_2}{2ES} + \alpha \Delta T\right) l = 0$$

$\frac{\partial N_1}{\partial N_2}$ určíme z podmínky rovnováhy $2\frac{\partial N_1}{\partial N_2}\cos\beta + 1 = 0$.

Po dosazení dostaneme rovnici

$$-\frac{1}{\cos^2\beta}\left(\frac{N_1}{ES} + \alpha \Delta T\right) + \left(\frac{N_2}{ES} + \alpha \Delta T\right) = 0 ,$$

ze které a z podmínky rovnováhy určíme

$$N_1 = -\alpha \Delta T ES \frac{1 - \cos^2\beta}{1 + 2\cos^3\beta} ,$$

$$N_2 = 2\alpha \Delta T ES \frac{1 - \cos^2\beta}{1 + 2\cos^3\beta} \cos\beta .$$

*Příklad 2.*

Jaká napětí vzniknou v prutech soustavy, ohřeje-li se pouze prut 1. Soustava prutů již není symetrická a sestavení deformační podmínky by bylo pracné. Doplňková deformační energie soustavy je

$$U^* = \left(\frac{\sigma_1^2}{2E} + \alpha \Delta T \sigma_1\right) S \frac{l}{\cos\beta} + \frac{\sigma_2^2}{2E} S l + \frac{\sigma_3^2}{2E} S \frac{l}{\cos\beta} =$$
$$= \left(\frac{N_1^2}{2ES} + \alpha \Delta T N_1\right) \frac{l}{\cos\beta} + \frac{N_2^2}{2ES} l + \frac{N_1^2}{2ES} \frac{l}{\cos\beta},$$

kde stále platí rovnice rovnováhy a tedy $N_3 = N_1$. Zvolme $N_1$ za staticky neurčitou veličinu, pak platí:

$$\frac{\partial U^*}{\partial N_1}=0 .$$

$$\left(\frac{N_1}{E S}+\alpha \Delta T\right)\frac{l}{\cos\beta}+\frac{4 N_1 l \cos^2\beta}{E S}+\frac{N_1 l}{E S \cos\beta}=0$$

Odtud

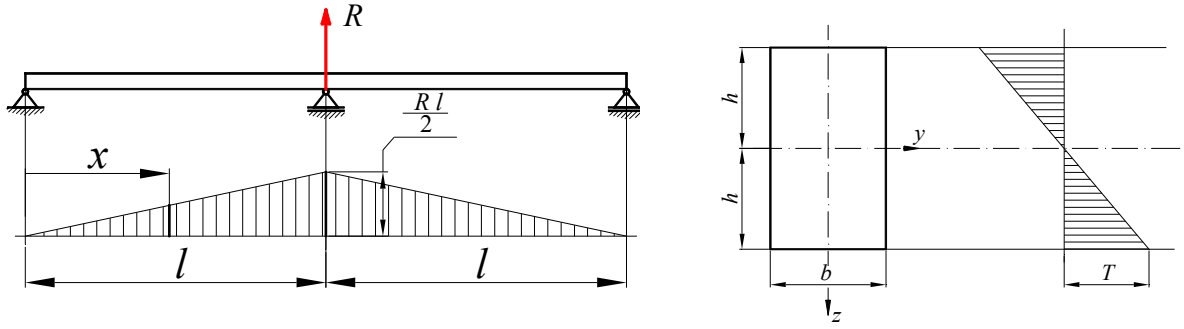
$$N_1=-\frac{\alpha \Delta T E S}{2(1+2\cos^3\beta)} ,$$

$$N_2=\frac{\alpha \Delta T E S \cos\beta}{1+2\cos^3\beta} ,$$

$$\sigma_1=\frac{N_1}{S} , \quad \sigma_2=\frac{N_2}{S} .$$

*Příklad 3.*

Nosník na třech podporách podle obr. 4.1 je ohřát o přírůstek teploty. $T(z)=T\frac{z}{h}$ (viz kap. 3.2, příklad 6)




Obr. 4.1

*Řešení:* Ve střední podpoře vznikne reakce, která vyvolá ohybový moment

$$M(x)=\frac{R}{2}x .$$

Napětí v nosníku

$$\sigma(x,z)=\frac{R}{2 I_y}x z=\frac{M(x)}{I_y}z .$$

Doplňková deformační energie

$$U^* = 2\int_0^l \frac{M^2(x)}{2\,E\,I_y}\,dx + \int_{(V)} \frac{M(x)}{I_y}\,z\,\alpha\,T(z)\,dV = 2\int_0^l \frac{M^2(x)}{2\,E\,I_y}\,dx + 2\int_0^l \left[\frac{M(x)}{I_y}\left(\int_{(S)} \alpha\,T(z)\,z\,dS\right)\right]dx =$$

$$= 2\int_0^l \frac{M^2(x)}{2\,E\,I_y}\,dx + 2\int_0^l \frac{M(x)\,M_T}{E\,I_y}\,dx = 2\int_0^l \left(\frac{M^2(x)}{2\,E\,I_y} + \frac{M(x)\,M_T}{E\,I_y}\right)dx .$$

Platí

$$\frac{\partial U^*}{\partial R} = 2\int_0^l \frac{1}{E\,I_y}\left(M(x) + M_T\right)\frac{\partial M(x)}{\partial R}\,dx = 0 ,$$

kde

$$\frac{\partial M(x)}{\partial R} = \frac{x}{2} .$$

Odtud

$$\int_0^l \left[M(x) + M_T\right] x\,dx = 0$$

$$\frac{R}{2}\frac{l^3}{3} + M_T\frac{l^2}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{-3\,M_T}{l} .$$

*Příklad 4.*

Příklad 5. z kapitoly 3.2 lze řešit i pomocí Castiglianovy věty. Pro staticky neurčitou reakci $R$ platí

$$\frac{\partial U^*}{\partial R} = 0 ,$$

$$M(x) = -R\,x ,$$

$$U^* = \int_0^l \left[\frac{M^2(x)}{2\,E\,I_y} + \frac{M(x)\,M_T}{E\,I_y}\right]dx ,$$

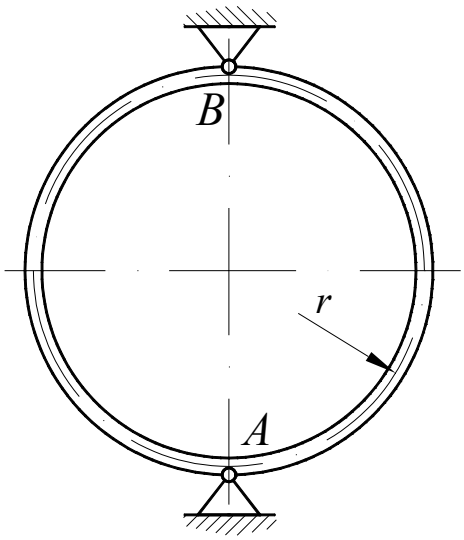
$$\frac{\partial U^*}{\partial R} = \int_0^l \frac{\left(M(x) + M_T\right)\frac{\partial M(x)}{\partial R}}{E\,I_y}\,dx = \frac{1}{E\,I_y}\int_0^l \left(M_T - R\,x\right)(-x)\,dx .$$

Odtud

$$-M_T\frac{l^2}{2} + R\frac{l^3}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{M_T}{l}\frac{3}{2} .$$

*Příklad 5.*

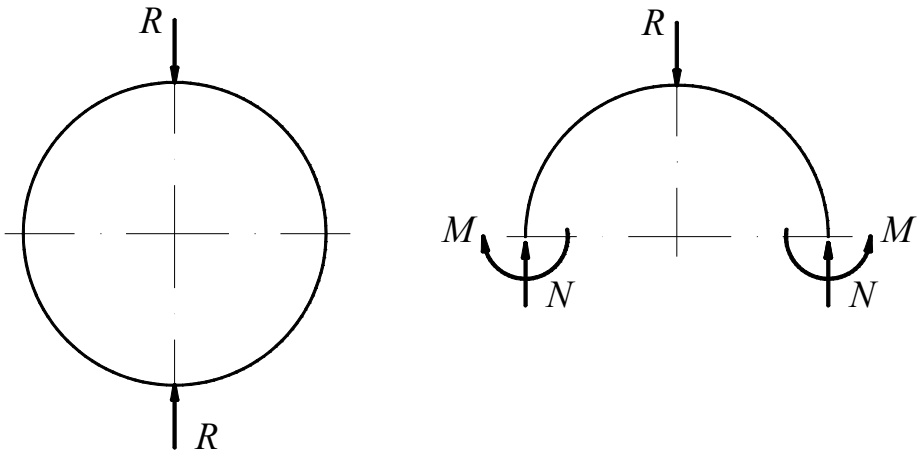
Tenká obruč je bez napětí vložena mezi dvě tuhé opory v bodech *A* a *B* podle obr. 4.2. Určete reakce v podporách po ohřátí celé obruče o teplotu $T$. Dáno: $r, d, E, \alpha, T$. Řešení je možné jen pomocí energetické metody. Příklad je $2\times$ staticky neurčitý.




Obr. 4.2

*Řešení:*

1) V tomto případě použijeme vztah pro energii napjatosti *U* a deformační podmínku. Uvolníme-li obruč a zahřejeme-li jí o teplotu *T*, změní se vzdálenosti *AB* o přírůstek $\Delta AB = \alpha T 2r$. V podporách tedy musí vzniknout síly *R*, které by průměr obruče stlačily o tuto vzdálenost.




Obr. 4.3

Deformační podmínka je

$$\frac{\partial U}{\partial R}=2\alpha T r,$$

kde $U$ je deformační energie. Úloha je $2\times$ staticky neurčitá.

Z podmínky rovnováhy podle obr. 4.3 vyjde $N=\frac{R}{2}$.

$M$ je staticky neurčitý vnitřní moment, proto platí

$$\frac{\partial U}{\partial M}=0.$$

Energie napjatosti je

$$U=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{M^2(\varphi)r}{2EI_y}d\varphi,$$

kde

$$M(\varphi)=M+\frac{R}{2}r(1-\cos\varphi).$$

2) Řešení pomocí doplňkové deformační energie $U^*$. V tomto případě použijeme $2\times$ větu o minimu deformační práce a bude platit

$$\frac{\partial U^*}{\partial R}=0,\ \frac{\partial U^*}{\partial M}=0.$$

Doplňkovou energii vypočteme z hustoty deformační energie

$$\lambda^*=\frac{\sigma^2}{2E}+\alpha T\sigma=\lambda+\alpha T\sigma.$$

$$U^*=U+\int_{(V)}\alpha T\sigma\,dV=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{M^2(\varphi)r}{2EI_y}d\varphi+4\alpha T\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_{(S)}\left(\frac{M(\varphi)}{I_y}z+\frac{N(\varphi)}{S}\right)dS\right]r\,d\varphi=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{M^2(\varphi)r}{2EI_y}d\varphi+4\alpha T\int_0^{\frac{\pi}{2}}N(\varphi)r\,d\varphi,$$

kde

$$\int_{(S)}z\,dS=0.$$

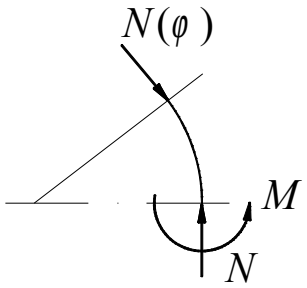
Do normálného napětí musíme zahrnout i vliv normálné síly $N(\varphi)=-\frac{R}{2}\cos\varphi$ v průřezu obruče (obr. 4.4)

Parciální derivace jsou $\frac{\partial N(\varphi)}{\partial R} = -\frac{1}{2}\cos\varphi$ , $\frac{\partial N(\varphi)}{\partial M} = 0$ .

Dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\frac{\partial U^*}{\partial R} = \frac{\partial U}{\partial R} + 4\,\alpha T \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial N(\varphi)}{\partial R} r\, d\varphi = 0 ,$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial M} = \frac{\partial U}{\partial M} = 0 .$$




Obr. 4.4

Z první rovnice opět vyjde $\frac{\partial U}{\partial R} - 2\,\alpha T\, r = 0$ .

# 5. Kruhové desky namáhané na ohyb

## 5.1 Úvod

Předpokládejme, že přírůstek teploty desky o tloušťce *h* se skládá se dvou částí

$$T = T_1(r) + T_2(r)\frac{2z}{h},$$

kde první část je závislá pouze na poloměru a druhá část je nulová ve střední rovině desky. Pokud můžeme předpokládat, že nedojde ke ztrátě stability desky, lze napětí a deformaci desky řešit superpozicí. Teplota $T_1(r)$ vyvolá v tenké desce napětí a deformace jako v tenkém disku. Teplota $T_2(r)$ vyvolá ohybová napětí a průhyb desky. Předpokládejme, že v desce vzniká příčná síla $Q(r)$ vlivem vnějších zatěžujících sil (spojitého zatížení *q*, síly *F* [N/m] rozložené na jednotku délky kružnice, či vnějších reakcí).

Označme

$$M_T(r) = E\,\alpha \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T_2(r)\frac{2z}{h} z\,dz = E\,\alpha\, T_2(r)\frac{h^2}{6}.$$

Potom radiální a tečný moment v desce bude

$$M_r = A - B\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}\int M_T(r)\,r\,dr - \frac{1+\nu}{r^2}\int r\left[\int Q(r)\,dr\right]dr - \frac{1}{r^2}\int Q(r)\,r^2\,dr,$$

$$M_t = A + B\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\int M_T(r)\,r\,dr - M_T(r) - (1+\nu)\int Q(r)\,dr + \\ + \frac{1+\nu}{r^2}\int r\left[\int Q(r)\,dr\right]dr + \frac{1}{r^2}\int Q(r)\,r^2\,dr.$$

Sklon tečné roviny k desce v radiálním směru je

$$\vartheta(r) = \frac{12\,r}{E\,h^3}\left(M_t - \nu\,M_r + M_T\right).$$

Průhyb desky dostaneme integrací $\vartheta(r)$

$$w = -\int \vartheta(r)\,dr + C.$$

Integrační konstanty určíme z okrajových podmínek. Napětí v desce vypočteme z vnitřních momentů $M_t$ a $M_r$

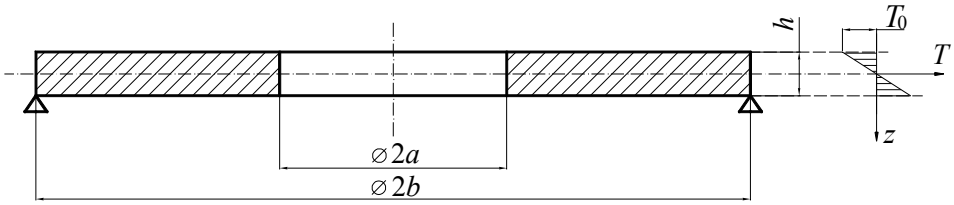
$$\sigma_r = \pm \frac{M_r}{h^2/6}, \qquad \sigma_t = \pm \frac{M_t}{h^2/6}.$$

## 5.2 Příklady

*Příklad 1.*

Volná tenká mezikruhová deska podle obr. 5.1 je zatížena přírůstkem teploty, který je lineární funkcí vzdálenosti od střední roviny $T(z) = \frac{2z}{h} T_0$. Určete napětí a deformaci desky.

Dáno: $a$, $b$, $h$, $E$, $\nu$, $\alpha$ a přírůstek teploty je $T_0$.




Obr. 5.1

*Řešení:*

Příčná síla v desce nevzniká: $Q(r) = 0$.

Teplotní moment $M_T = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} E\,\alpha\,T(z)\,z\,dz = E\,\alpha\,T_0 \frac{h^2}{6} = konst.$

Radiální a tečný moment v desce jsou

$$M_r(r) = A - B\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}\int M_T\, r\, dr = A - B\frac{1}{r^2} - \frac{1}{2} M_T,$$

$$M_t(r) = A + B\frac{1}{r^2} - M_T + \frac{1}{r^2}\int M_T\, r\, dr = A + B\frac{1}{r^2} - \frac{1}{2} M_T.$$

Radiální moment na okrajích desky je roven nule, tedy $M_r(a) = 0$, $M_r(b) = 0$. Odtud vypočteme

konstanty

$$A - B\frac{1}{a^2} = \frac{M_T}{2}$$
$$A - B\frac{1}{b^2} = \frac{M_T}{2} \qquad \Rightarrow A = \frac{M_T}{2},\ B = 0\ .$$

Křivosti desky po deformaci jsou

$$\frac{\vartheta}{r} = \kappa_t = \frac{12}{E h^3} M_T,\ \frac{d\vartheta}{dr} = \kappa_r = \frac{12}{E h^3} M_T\ .$$

Průhyb $w = \frac{-12}{E h^3} \int M_T r\, dr = \frac{-12}{E h^3}\left( M_T \frac{r^2}{2} + C \right)$,

kde z okrajové podmínky $w(b) = 0$ vypočteme $C = -M_T \frac{b^2}{2}$.

Průhyb desky na poloměru *a* pak bude $w(a) = \frac{6}{E h^3} M_T \left( b^2 - a^2 \right)$.

Deska je bez napětí, pouze se prohne. Natočení desky na poloměru *a* bude:

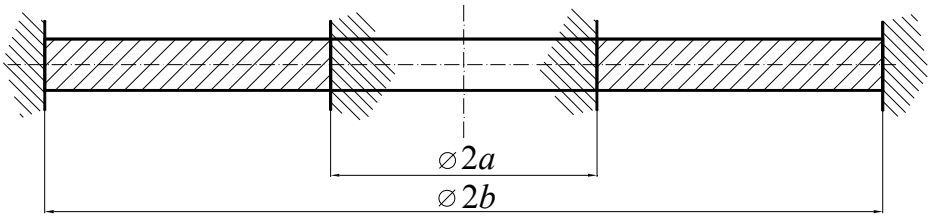
$$\vartheta(a) = a \frac{12}{E h^3} M_T\ .$$

*Příklad 2.*

Deska z příkladu 1 je vetknutá na vnějším i vnitřním okraji (obr. 5.2). Jaká vzniknou v desce napětí? Průběh teploty je opět $T(r, z) = T_0 \frac{2z}{h}$.

*Řešení:* Vzhledem k tomu, že $M_T = E \alpha T_0 \frac{h^2}{6} = konst.$ nezávisí na poloměru, deska se neprohne. Tečné a radiální momenty budou stejné a konstantní

$$M_r = M_t = \frac{-M_T}{1 - \nu}\ .$$



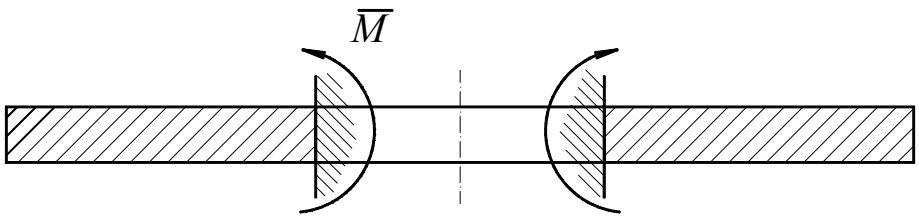

Obr. 5.2

*Příklad 3.*

Deska z příkladu 1 je vetknutá na vnitřním okraji a na vnějším okraji je volná (obr. 5.3). Jaká vzniknou v desce napětí?

*Řešení:* Na desku bude působit z vetknutí na vnitřním okraji radiální moment $\bar{M}$. Musí být tak velký, aby sám o sobě způsobil na poloměru *a* stejné natočení, jako vzniká v důsledku teplotního zatížení u volné desky - tedy (podle příkladu 1)

$$\vartheta(a)=a\frac{12}{Eh^3}M_T$$




Obr. 5.3

Pro $\vartheta(\rho)$ a $M_r(\rho)$ při zatížení momentem $\bar{M}$ platí

$$^{\bar{M}}\vartheta(\rho)=\frac{b}{D}\left(C_1\rho+C_2\frac{1}{\rho}\right),$$

$$^{\bar{M}}M_r(\rho)=C_1(1+\nu)-C_2(1-\nu)\frac{1}{\rho^2},$$

kde $\rho=\frac{r}{b}$.

Okrajové podmínky jsou

$$^{\bar{M}}M_r\left(\frac{a}{b}\right)=\bar{M}\,,\quad ^{\bar{M}}M_r(1)=0\,.$$

Po dosazení do okrajových podmínek dostaneme konstanty $C_1$, $C_2$

$$C_1=\frac{\bar{M}}{(1+\nu)}\frac{1}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2},\quad C_2=\frac{\bar{M}}{(1-\nu)}\frac{1}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\,.$$

Sklon tečné roviny je

$$^{\bar{M}}\vartheta(\rho)=\frac{b}{D}\frac{\bar{M}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\left(\frac{1}{1+\nu}\rho+\frac{1}{1-\nu}\frac{1}{\rho}\right)$$

a na vnitřním okraji platí

$$^{\bar{M}}\vartheta\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{b}{D}\frac{\bar{M}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\left(\frac{1}{1+\nu}\frac{a}{b}+\frac{1}{1-\nu}\frac{b}{a}\right).$$

Ze srovnání obou natočení v místě vetknutí

$$\frac{b}{D}\frac{\bar{M}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\left(\frac{1}{1+\nu}\frac{a}{b}+\frac{1}{1-\nu}\frac{b}{a}\right)=a\frac{12}{E\,h^3}M_T$$

získáme velikost $\bar{M}$

$$\bar{M}=\frac{M_T}{1-\nu}\left[1-\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]\frac{1}{1+\frac{1+\nu}{1-\nu}\left(\frac{b}{a}\right)^2}\,.$$

Radiální a tečný moment jsou

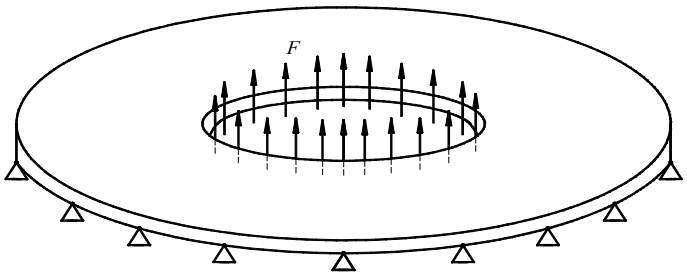
$$M_r(\rho)=\frac{\bar{M}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\left(1-\frac{1}{\rho^2}\right),\quad M_t(\rho)=\frac{\bar{M}}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\left(1+\frac{1}{\rho^2}\right).$$

*Příklad 4.*

Deska z příkladu 1 je prostě podepřená na obou okrajích (obr. 5.4). Jaké vznikne napětí v desce?

*Řešení:* Kdyby byla deska podepřená pouze na vnějším okraji, pak po teplotním zatížení bude bez napětí a průhyb na jejím vnitřním okraji bude podle příkladu 1

$${}^{T}w(a)=\frac{12}{E\,h^3}M_T(b^2-a^2)\,.$$




Obr. 5.4

Je-li deska podepřena na obou okrajích, musí vnitřní podpora působit na desku celkovou silou $F$ [N], která by sama prohnula desku na vnitřním okraji o $\frac{12\,b^2}{E\,h^3}M_T\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]$.

Příčná síla v desce $Q(r)=\frac{-F}{2\pi r}\ \rightarrow\ Q(\rho)-\frac{F}{2\pi b}\frac{1}{\rho}$.

Pravá strana diferenciální rovnice je $\frac{F\,b}{2\pi D}\frac{1}{\rho}$.

Vztah pro sklon tečné roviny $\vartheta(\rho)$ je

$${}^{F}\vartheta(\rho)=\frac{F\,b}{2\pi D}\left(C_1\rho+C_2\frac{1}{\rho}+\frac{1}{2}\rho\ln\rho\right).$$

Konstanty určíme z okrajových podmínek

$$\left.\begin{array}{l} {}^{F}M_r\left(\frac{a}{b}\right)=0 \\ {}^{F}M_r(1)=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow C_1=\frac{-1}{2(1+\nu)}+\frac{1}{2}\frac{\ln\frac{a}{b}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2-1}\,,\quad C_2=\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{1}{2}\frac{\ln\frac{a}{b}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2-1}\,.$$

Po dosazení

$${}^{F}M_r=\frac{F}{2\pi}\left[C_1(1+\nu)-C_2(1-\nu)\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{2}(1+\nu)\ln\rho+\frac{1}{2}\right]$$

$${}^{F}M_t=\frac{F}{2\pi}\left[C_1(1+\nu)+C_2(1-\nu)\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{2}(1+\nu)\ln\rho+\frac{\nu}{2}\right]$$

Průhyb desky

$${}^{F}w=-\int b\,\vartheta(\rho)\,d\,\rho=\frac{-F\,b}{2\pi D}\left[C_1\frac{\rho^2}{2}+C_2\ln\rho+\frac{1}{4}\rho^2\left(\ln\rho-\frac{1}{2}\right)+C_3\right].$$

Konstantu $C_3$ určíme z podmínky ${}^{F}w(1)=0$ - průhyb na vnějším okraji je roven 0 a odtud

$$C_3=\frac{-1}{2}C_1+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}+\frac{1}{4(1+\nu)}-\frac{1}{4}\frac{\ln\frac{a}{b}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2-1}\,.$$

Po dosazení $C_1$, $C_2$, $C_3$ do vztahu pro průhyb ${}^{F}w$ můžeme vypočítat průhyb ${}^{F}w\left(\frac{a}{b}\right)$ na vnitřním okraji. Z podmínky ${}^{F}w(a)+{}^{F}w(b)=0$ dostaneme sílu $F$ (reakci v podpoře). Po dosazení $F$ do vztahů pro momenty dostaneme napětí v desce.

# 6. Kotouče a dlouhé válce

## 6.1 Úvod

Teplotní napětí v tenkém disku při rovinné napjatosti, kdy nic nebrání v teplotní dilataci tloušťky a teplota je pouze funkcí poloměru $T(r)$, jsou

$$\sigma_r = A - B\frac{1}{r^2} - \frac{E\alpha}{r^2}\int T(r)\,r\,dr,$$

$$\sigma_t = A + B\frac{1}{r^2} + \frac{E\alpha}{r^2}\int T(r)\,r\,dr - E\alpha T(r),$$

$$\sigma_a = 0,$$

radiální posuv je

$$u(r) = \frac{r}{E}[\sigma_t - \nu\sigma_r + E\alpha T(r)].$$

K neurčitému integrálu ve vztazích pro $\sigma_r$ a $\sigma_t$ již nepřičítáme žádnou integrační konstantu. Konstanty *A* a *B* určíme z okrajových podmínek pro radiální napětí $\sigma_r$ či pro radiální posuv *u*.

Při rovinné deformaci - (např. u tenkého disku, kdy je bráněno teplotní dilataci tloušťky, nebo se jedná o dlouhý válec) je $\sigma_a \neq 0$ a $\varepsilon_a = konst.$ Vztahy pro napětí dostaneme ze vztahů pro $\sigma_r$ a $\sigma_t$ tak, že dosadíme za Youngův modul *E* výraz $E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}$ a za teplotní roztažnost $\alpha$ výraz $\alpha_1 = (1+\nu)\alpha$, pak

$$\sigma_r = A - B\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}\int \frac{E\alpha}{1-\nu^2}T(r)\,r\,dr,$$

$$\sigma_t = A + B\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\int \frac{E\alpha}{1-\nu^2}T(r)\,r\,dr - \frac{E\alpha}{1-\nu^2}T(r).$$

Axiální napětí bude

$$\sigma_a = E\varepsilon_a - E\alpha T(r) + \nu(\sigma_r + \sigma_t) = E\alpha_a + 2\nu A - \frac{E\alpha}{1-\nu^2}T(r).$$

Pokud je axiální poměrné prodloužení $\varepsilon_a$ nulové, pak napětí $\sigma_a$ vypočteme ze vztahu pro $\sigma_a$.

Pokud nic nebrání v osovém roztažení dlouhého válce, vypočteme jeho prodloužení $\varepsilon_a$ z podmínky nulové osové síly

$$\int_S \sigma_a \, dS = 0 \, .$$

Radiální posuv $u(r) = \varepsilon_r(r)\, r$ bude

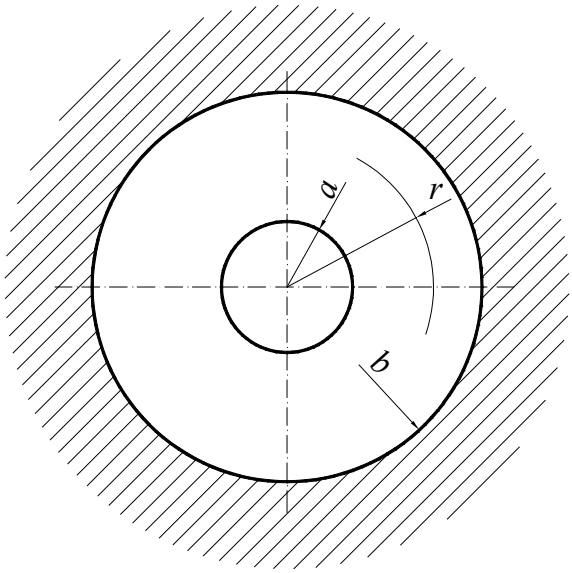
$$u(r) = \frac{r}{E}\left[\sigma_a - \nu\,(\sigma_r + \sigma_a)\right] + r\,\alpha\,T(r) \, .$$

## 6.2 Příklady

*Příklad 1.*

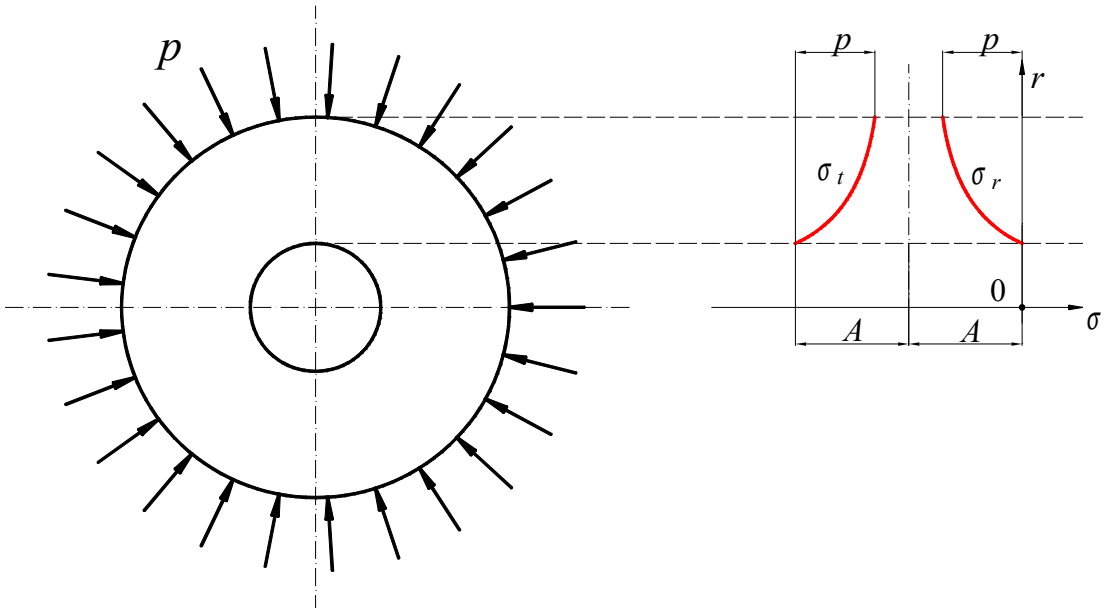
Tenký ocelový kotouč podle obr. 6.1 je při počáteční teplotě $T_0$ bez napětí. Vnějšímu okraji kotouče je zabráněno v roztažení. Jaké napětí vznikne v kotouči, ohřeje-li se celý zvolna o teplotu $T$?

Dáno: $a$ = 20 mm, $b$ = 50 mm, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ K$^{-1}$, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $T$ = 20 °C, $\nu$ = 0,3.




Obr. 6.1

*Řešení:* Kdyby byl kotouč volný, pak při ohřátí o teplotu $T$ by se každý jeho poloměr zvětšil o $\Delta r_T = r\,\alpha\,T$, tedy poloměr $b$ by se zvětšil o $\Delta b_T = b\,\alpha\,T$. Tomuto rozšíření brání okolí kotouče, mezi kotoučem a okolím vznikne tlak $p$. Jeho velikost určíme z deformační podmínky $\Delta b_p + \Delta b_T = 0$.




Obr. 6.2

Konstanta $A$ je

$$A=-\frac{p\,b^2}{b^2-a^2}=-p\frac{1}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2},$$

Napětí na vnějším okraji kotouče jsou (obr. 6.2)

$${}^{p}\sigma_t(b)=2A+p,$$
$${}^{p}\sigma_r(b)=-p.$$

Odpovídající deformace je

$$\Delta b_p=\frac{b}{E}(2A+p+\nu\,p).$$

Z deformační podmínky

$$\frac{b}{E}(2A+p+\nu\,p)+b\,\alpha T=0$$

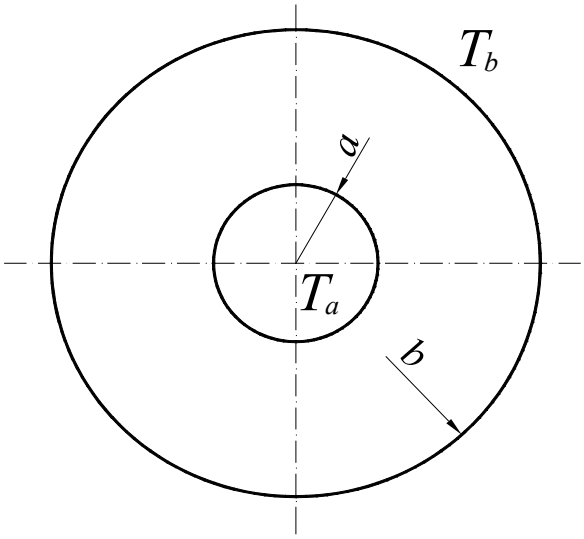
vypočteme $p=44{,}4$ MPa.

Nejméně příznivá napjatost je jednoosá napjatost na poloměru $a$. Napětí je rovno $\sigma=|2A|=52{,}9$ MPa.

*Příklad 2.*

Tenký kotouč podle obr. 6.3 byl při teplotě $T_0$ bez napětí. Jeho čelní plochy jsou teplotně izolovány, ale nic nebrání v jejich volné dilataci. Tento kotouč byl zvolna zahřát tak, že vznikne ustálený tepelný stav, kdy na vnitřním okraji kotouče je teplota $T_a$ a na vnějším okraji kotouče je teplota $T_b$. Jaké je napětí v kotouči?

Dáno: $a$ = 20 mm, $b$ = 50 mm, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ K$^{-1}$, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $T_0$ = 20 °C, $T_a$ = 60 °C, $T_b$ = 30 °C, $\nu$ = 0,3.




Obr. 6.3

*Řešení:* V kotouči vzniká ustálené teplotní pole, které je osově symetrické, teplota se po tloušťce kotouče nemění. Jedná se o rovinnou napjatost - nevznikne osové napětí. Rovnice vedení tepla má v tomto případě tvar

$$\frac{d^2T}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dT}{d\rho} = 0 \quad , \text{ kde } \rho = \frac{r}{r_{vzt}} .$$

Za vztažný poloměr zvolíme vnější poloměr kotouče $r_{vzt} = b$. Řešení této rovnice je funkcí teploty

$$T(\rho) = C + D \ln \rho ,$$

kde integrační konstanty $C$ a $D$ určíme z okrajových podmínek pro vnitřní a vnější poloměr, tedy

$$T\left(\frac{a}{b}\right) = T_a - T_0 ,$$
$$T(1) = T_b - T_0 .$$

Odtud

$$C = T_b - T_0 \,, \quad D = \frac{T_b - T_a}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Diferenciální rovnice pro radiální posuv v případě rovinné napjatosti:

$$\frac{1}{b^2}\left( \frac{d^2 u}{d\,\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du}{d\,\rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) = \frac{1}{b}\frac{dT(\rho)}{d\,\rho}\alpha(1+\nu) \,.$$

Z homogenního řešení $u_H = C_1 \rho + C_2 \frac{1}{\rho}$ dostáváme známé vztahy pro napětí v rotačně symetrických tenkých kotoučích

$$\sigma_{rH} = A - B\frac{1}{\rho^2} \,,$$
$$\sigma_{tH} = A + B\frac{1}{\rho^2} \,,$$

kde integrační konstanty $A$ a $B$ určujeme z podmínek na okraji kotouče.

Diferenciální rovnici pro radiální posuv vynásobíme $b^2$ a dosadíme za funkci $T(\rho)$. Na pravé straně dostáváme: $b\,\alpha(1+\nu)\,D\frac{1}{\rho}$. Označme $R = b\,\alpha(1+\nu)\,D$. Partikulární řešení bude v tomto případě

$$u_P = \frac{1}{R}\rho \ln \rho$$

a napětí z tohoto řešení odvozená jsou

$$\sigma_{rP} = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{1}{b}\left( \frac{d\,u_P}{d\,\rho} + \nu\frac{u_P}{\rho} \right) = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{1}{b}\frac{R}{2}\left[ 1 + (1+\nu)\ln\rho \right],$$

$$\sigma_{tP} = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{1}{b}\left( \frac{u_P}{\rho} + \nu\frac{d\,u_P}{d\,\rho} \right) = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{1}{b}\frac{R}{2}\left[ \nu + (1+\nu)\ln\rho \right].$$

Sečtěme homogenní řešení a partikulární řešení a přidáme teplotní člen $\frac{-E\,\alpha\,T(\rho)}{1-\nu}$. Dostaneme napětí

$$\sigma_r = A - B\frac{1}{\rho^2} + \frac{E}{1-\nu^2}\frac{1}{b}\frac{R}{2}\left[ 1 + (1+\nu)\ln\rho \right] - \frac{E\,\alpha\,T(\rho)}{1-\nu} \,,$$

$$\sigma_t = A + B\frac{1}{\rho^2} + \frac{E}{1-\nu^2}\frac{1}{b}\frac{R}{2}\left[ \nu + (1+\nu)\ln\rho \right] - \frac{E\,\alpha\,T(\rho)}{1-\nu} \,.$$

Integrační konstanty $A$ a $B$ určíme z podmínek pro volné okraje:

$$\sigma_r\left(\frac{a}{b}\right)=0\ ,$$
$$\sigma_r(1)=0\ .$$

Po dosazení

$$A-B\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{-E}{1-\nu^2}\frac{1}{b}\frac{R}{2}\left[1+(1+\nu)\ln\frac{a}{b}\right]+\frac{E\,\alpha(T_a-T_0)}{1-\nu}\ ,$$

$$A-B=\frac{-E}{1-\nu^2}\frac{1}{b}\frac{R}{2}+\frac{E\,\alpha(T_b-T_0)}{1-\nu}\ .$$

Rovnice můžeme dále upravovat a konstanty $A$ a $B$ vyjádřit obecně pro tento typ zatížení a okrajových podmínek. Rozumnější bude v této fázi konstanty, které mají rozměr napětí, vypočítat numericky. Vyjde $A$ = 83,56 MPa, $B$ = 83,56 MPa. Průběh radiálního a tečného napětí je na obr. 6.4. V tomto případě rovinné napjatosti nastane deformace v axiálním směru. Tloušťka kotouče se bude zvětšovat všude a nerovnoměrně v závislosti na poloměru.

Kdybychom zabránili volné změně tloušťky kotouče, vzniklo by v kotouči osové napětí $\sigma_a(r)$. Předpokládejme, že změně tloušťky je zcela zabráněno vnější vazbou, pak $\varepsilon_a=0$ a jedná se o tzv. rovinnou deformaci. Určíme napětí $\sigma_r$, $\sigma_t$, $\sigma_a$ v tomto případě. Pro poměrné deformace máme nyní vztahy

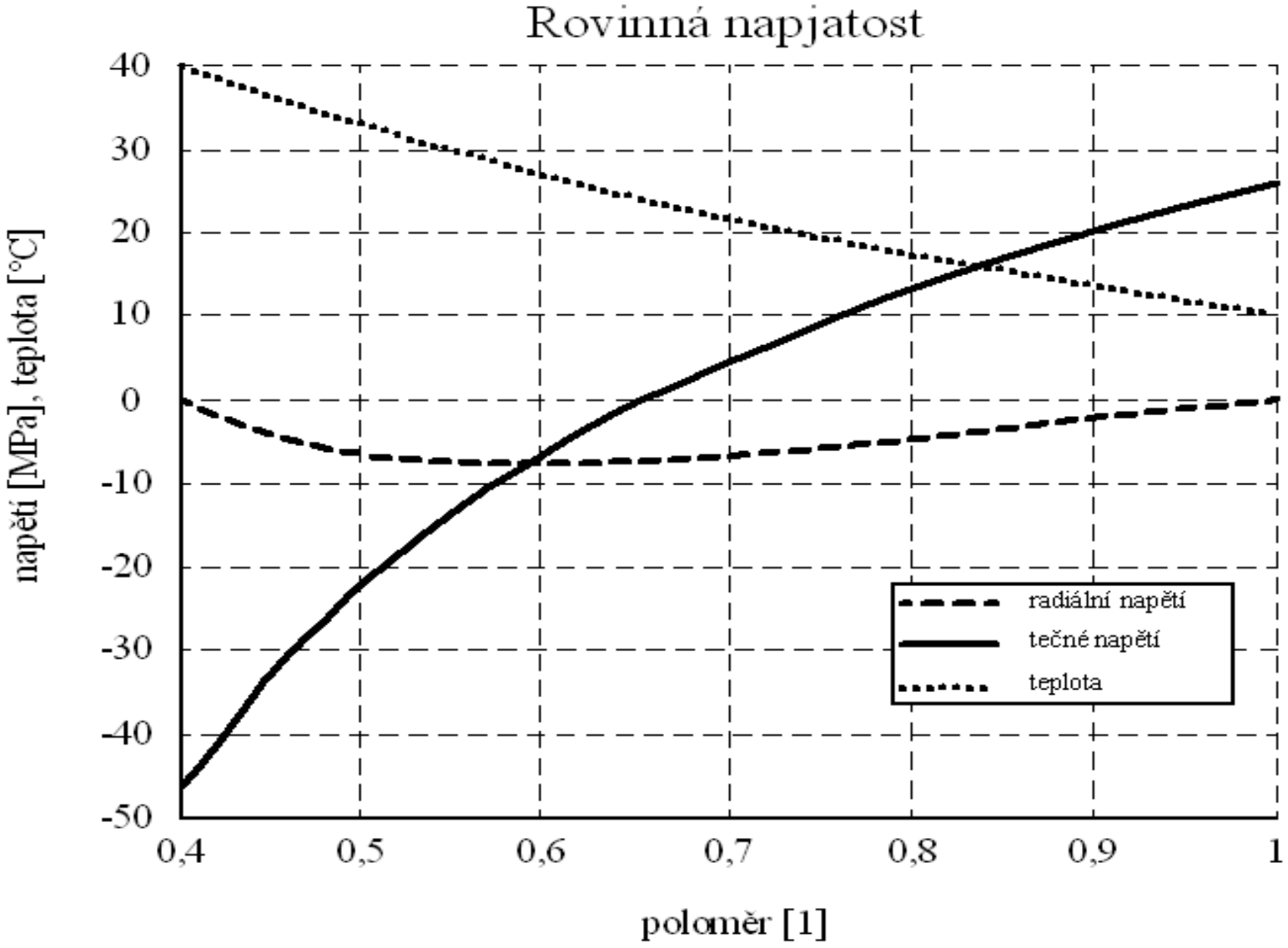
$$\varepsilon_r=\frac{1}{E}\left[\sigma_r-\nu(\sigma_t+\sigma_a)\right]+\alpha T(r),$$
$$\varepsilon_t=\frac{1}{E}\left[\sigma_t-\nu(\sigma_r+\sigma_a)\right]+\alpha T(r),$$
$$\varepsilon_a=\frac{1}{E}\left[\sigma_a-\nu(\sigma_r+\sigma_t)\right]+\alpha T(r)=0.$$

Z poslední rovnice získáme $\sigma_a=\nu(\sigma_r+\sigma_t)-E\,\alpha\,T(r)$.

Na pravé straně diferenciální rovnice pro radiální posuv $u$ je v případu rovinné deformace výraz

$$b\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\frac{d\,T(\rho)}{d\,\rho}=b\,\alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}D\frac{1}{\rho}=R^*\frac{1}{\rho}.$$

Zde obdobně zavedeme $R^*=b\,\alpha\dfrac{1+\nu}{1-\nu}D$.


Rovinná napjatost
napětí [MPa], teplota [°C]
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
poloměr [1]
radiální napětí
tečné napětí
teplota

Obr. 6.4

Z homogenního řešení rovnice $u_H = C_1 \rho + C_2 \frac{1}{\rho}$ máme opět

$$\sigma_{rH} = A^* - B^* \frac{1}{\rho^2}, \quad \sigma_{tH} = A^* + B^* \frac{1}{\rho^2},$$

(konstanty $A^*$a $B^*$ mají jinou hodnotu, než $A$ a $B$ v předchozím řešení).

Partikulární řešení $u_P = \frac{1}{2} R^* \rho \ln \rho$ dosadíme do vztahů pro radiální a tečné napětí (tyto vztahy platí pro rovinnou deformaci a jsou různé od vztahů pro napětí v předchozí části příkladu, kdy se jednalo o rovinnou napjatost):

$$\sigma_{rP} = \frac{E}{1+\nu} \frac{d u_P}{d r} + \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{d u_P}{d r} + \frac{u_P}{r} \right) = \frac{R^*}{2b} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (1 - \nu + \ln \rho),$$

$$\sigma_{tP} = \frac{E}{1+\nu} \frac{u_P}{r} + \frac{E \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{d u_P}{d r} + \frac{u_P}{r} \right) = \frac{R^*}{2b} \frac{E}{(\nu)(1-2\nu)} (1 - \nu + \ln \rho).$$

K součtu jednotlivých částí napětí musíme ještě připojit teplotní člen $\frac{-E \alpha T(\rho)}{1-2\nu}$:

$$\sigma_r^* = A^* - B^* \frac{1}{\rho^2} + \frac{R^*}{2b} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (1 - \nu + \ln \rho) - \frac{E \alpha T(\rho)}{1-2\nu},$$

$$\sigma_t^* = A^* + B^* \frac{1}{\rho^2} + \frac{R^*}{2b} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu + \ln \rho) - \frac{E \alpha T(\rho)}{1-2\nu}.$$

Axiální napětí bude

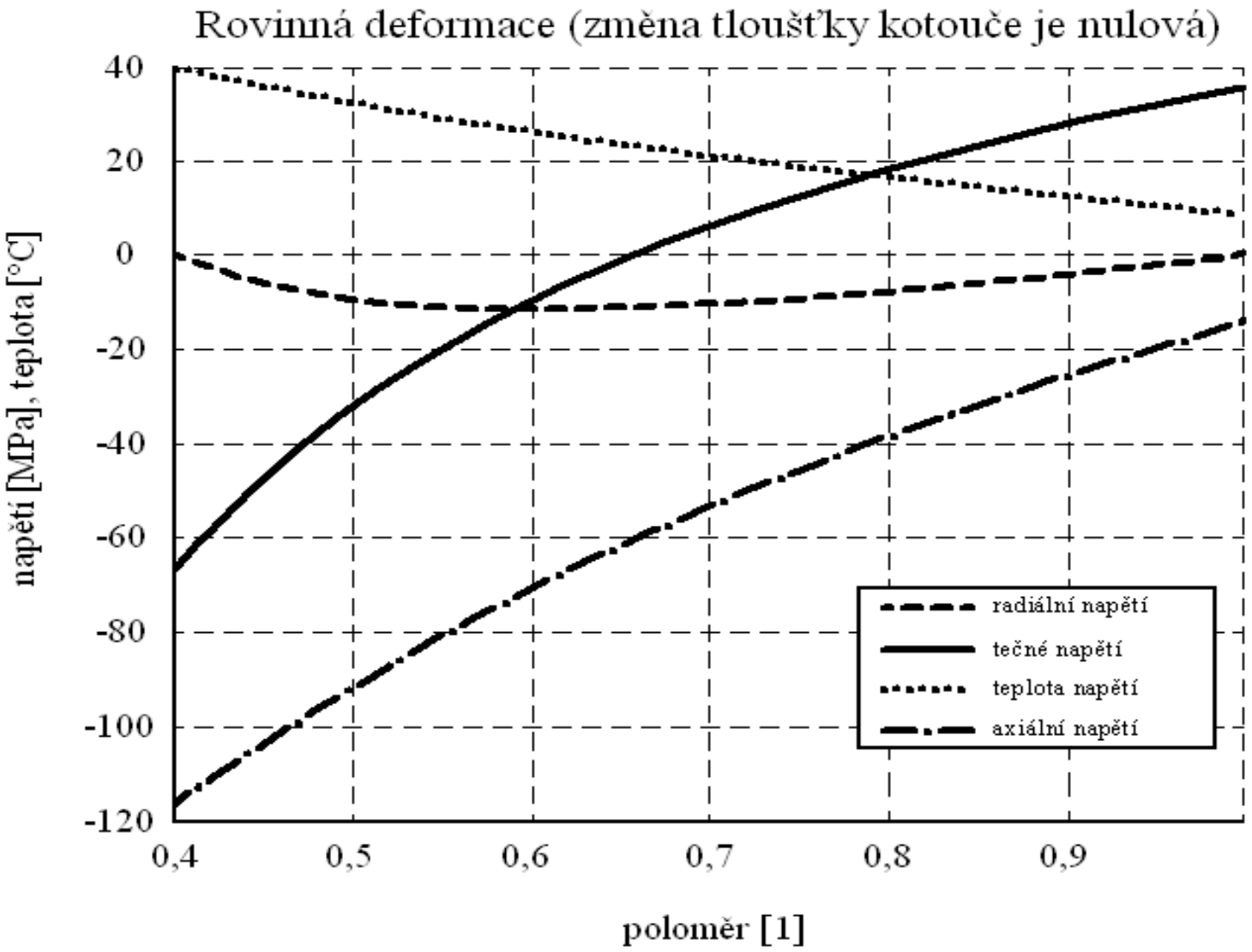
$$\sigma_a^* = \nu \left[ 2 A^* + \frac{R^*}{2b} \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (1 + \ln \rho) \right] - \frac{E \alpha T(\rho)}{1-2\nu}.$$

Z podmínek na okrajích kotouče $\sigma_r^* \left( \frac{a}{b} \right) = 0, \ \sigma_r^*(1) = 0$ určíme konstanty $A^*$a $B^*$, které dosadíme do vztahů pro napětí, pak

$A^*$ = 148,43 MPa , $B^*$ = - 9,796 MPa .

Průběh napětí je na obr. 6.5.

*Pozn.:* Vztahy pro napětí $\sigma_r^*$ a $\sigma_t^*$ v případu rovinné deformace (kotouči je bráněno v dilataci tloušťky, tedy $\varepsilon_a = 0$ ) můžeme dostat přímo ze vztahů $\sigma_r$ a $\sigma_t$ pro

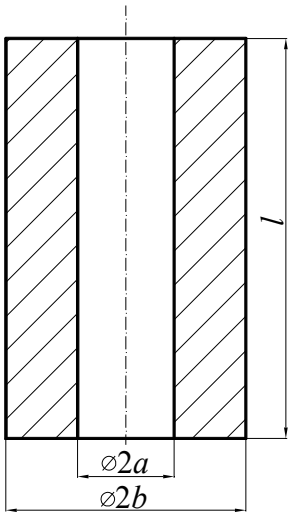

Rovinná deformace (změna tloušťky kotouče je nulová)
napětí [MPa], teplota [°C]
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
poloměr [1]
radiální napětí
tečné napětí
teplota napětí
axiální napětí

Obr. 6.5

rovinnou napjatost (volná dilatace tloušťky $\sigma_a = 0$ ), jestliže do nich dosadíme za Youngův modul $E$ vztah $E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}$ , za teplotní roztažnost $\alpha$ vztah $\alpha_1 = (1+\nu)\alpha$ a za Poissonovu konstantu $\nu$ vztah $\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$ . (Je třeba dosadit i do výrazu pro konstantu $R$.)

*Příklad 3.*

Mějme dlouhý dutý válec s rozměry $a = 20$ mm, $b = 50$ mm, $l = 100$ mm, $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ K$^{-1}$, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0{,}3$, s počáteční teplotou $T_0 = 20$ °C s ustáleným teplotním polem $T_a = 60$ °C, $T_b = 30$ °C (stejné parametry jako v příkladu 2). Nic nebrání v jeho délkové dilataci. $T(\rho) = C + D \ln \rho$ . Jaká vzniknou ve válci napětí?




Obr. 6.6

*Řešení:* Jedná se o rovinnou deformaci, kdy v dostatečné vzdálenosti od konců je $\varepsilon_a = konst. \neq 0$. Použijeme vztahy pro deformace při trojosé napjatosti a vypočteme axiální napětí

$$\sigma_a = E\,\varepsilon_a - E\,\alpha\,T(\rho) + \nu(\sigma_r + \sigma_t),$$

$$\varepsilon_a = konst.$$

Ve vztazích pro napětí $\sigma_r$ a $\sigma_t$ tedy přibude konstantní člen $\frac{E\,\varepsilon_a\,\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ .

Pravá strana diferenciální rovnice pro radiální posuv se nezmění, tedy

$$b\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\frac{dT(\rho)}{d\rho}=b\,\alpha\frac{1+\nu}{1-\nu}D\frac{1}{\rho}=R^*\frac{1}{\rho}.$$

Vztahy pro napětí jsou

$$\sigma_r^{**}=A^{**}-B^{**}\frac{1}{\rho^2}+\frac{R^*}{2b}\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(1-\nu+\ln\rho)-\frac{E\alpha T(\rho)}{1-2\nu}+\frac{E\varepsilon_a\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$\sigma_t^{**}=A^{**}+B^{**}\frac{1}{\rho^2}+\frac{R^*}{2b}\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\nu+\ln\rho)-\frac{E\alpha T(\rho)}{1-2\nu}+\frac{E\varepsilon_a\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

a axiální napětí je

$$\sigma_a^{**}=\nu\left[2A^{**}+\frac{R^*}{2b}\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(1+\ln\rho)\right]-\frac{E\alpha T(\rho)}{1-2\nu}+E\varepsilon_a.$$

Konstanty $A^{**}$ a $B^{**}$ určíme z okrajových podmínek

$$\sigma_r^{**}\left(\frac{a}{b}\right)=0,$$
$$\sigma_r^{**}(1)=0.$$

Odtud

$$B^{**}=B^*,\quad A^{**}=A^*-\frac{E\varepsilon_a\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

tedy $\sigma_r^{**}=\sigma_r^*$, $\sigma_t^{**}=\sigma_t^*$ (napětí budou stejná jako v předchozím příkladě)

a konstantu $\varepsilon_a$ určíme z podmínky

$$\int_S\sigma_a^{**}dS=0.$$

Prodloužení válce bude $\Delta l=\varepsilon_a l$.

# Literatura:

[1] Hoeschl, C.: Vliv teploty na napjatost a pevnost částí. Dům techniky ČSVTS, Praha 1986

[2] Boley, B.,A., Weiner, J.H.: Theory of thermal stresses, Wiley, New York 1960

[3] Noda, N., Hetnarski, R.B., Tanigawa, Y.: Thermal stresses. Taylor&Francis, New York 2003

[4]Kovalenko, A.D.: Termouprugost, Izd. Vyša škola, Kiev, 1975

[5] Stříž,B.: Pružnost a pevnost II.díl. Skripta VŠST, Liberec 1986

[6] Bojaršinov,S.V.: Osnovy strojitělnoj mechaniky. Mašinostrojenije, Moskva 1973