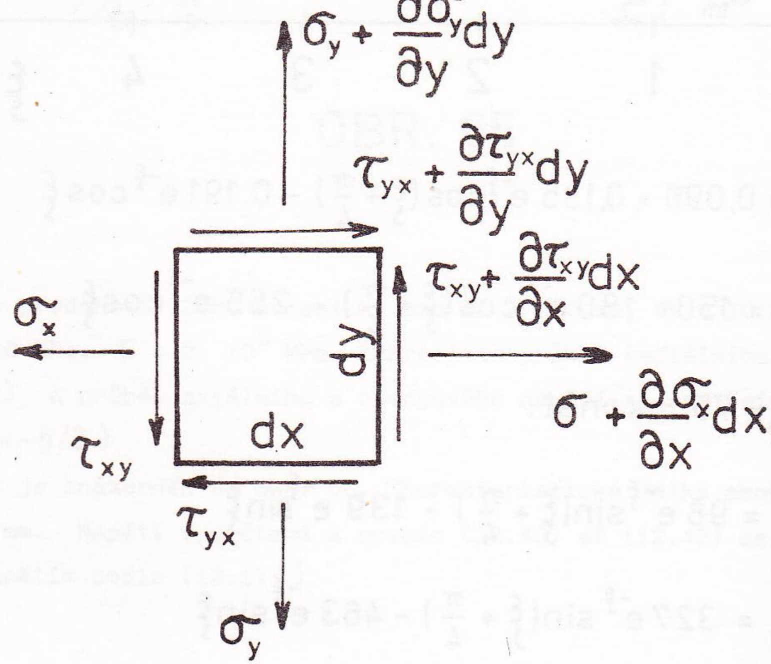
Krut nekruhových průřezů.

CYRIL HÖSCHL

Skriptum Pružnost a pevnost II

Liberec 1992



$\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$
$\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$
$\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$
σ_x
dy
$\sigma + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$
dx
τ_{xy}
τ_{yx}
σ_y

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -X \quad ,$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -Y \quad ,$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -Z \quad . \tag{13.3}$$

Tři rovnice rovnováhy obsahují šest neznámých funkcí σ_x až τ_{yz} . Proto nestačí k určení napjatosti. Je třeba připojit deformační podmínky. Napětí jsou s poměrnými deformacemi vázána Hookeovým zákonem:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y - \mu\sigma_z) \quad , \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \quad ,$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_z - \mu\sigma_x) \quad , \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \quad ,$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y) \quad , \qquad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \quad . \tag{13.4}$$

Máme sice dalších šest rovnic, ale s nimi i dalších šest neznámých funkcí ε_x až γ_{zx} . Pro ně známe Cauchyho vztahy, které jsme odvodili v první části skript [rovnice (13.1), (13.3)] :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad ,$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad ,$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad , \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad . \tag{13.5}$$

Rovnice kompatibility

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

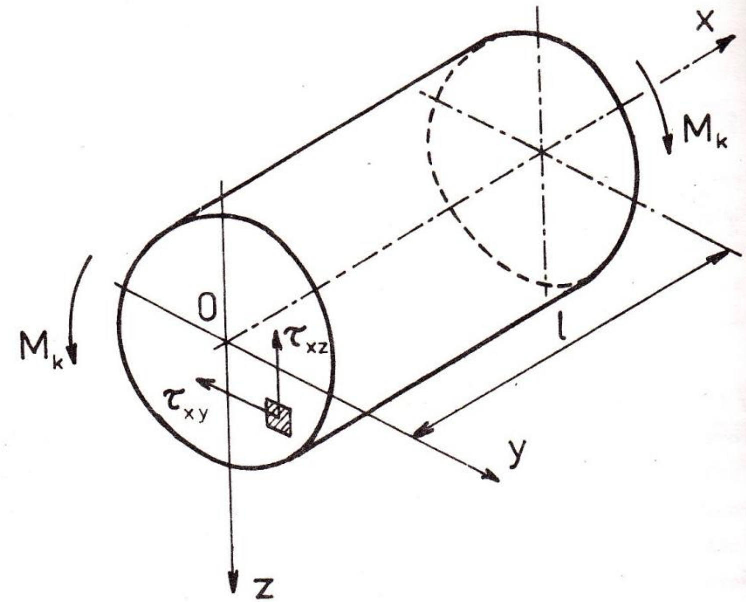
$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}$$

$$2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right]$$

$$2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right]$$

$$2\,\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right]$$



OBR. 68

Podle (13.4) a (13.5) to znamená, že také

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad . \tag{14.2}$$

Posuvy u, v, w ve směrech souřadnicových os x, y, z budou tedy funkcemi vždy jen dvou proměnných:

$$u = u(y,z) \quad , \quad v = v(x,z) \quad , \quad w = w(x,y) \quad . \tag{14.3}$$

Osa x je rovnoběžná se střednicí tyče nebo do ní spadá, osy y, z leží v koncovém průřezu tyče. Druhý konec tyče je v rovině $x = l$.

Dále budeme předpokládat, že průřezy se mohou bortit, deplanovat (vybočit z roviny). Avšak v průmětu do roviny kolmé k ose x se jejich tvar nemění. Tomu odpovídá požadavek, aby se pravoúhlé elementy $dy \times dz$ při deformaci nezkosily, tj. aby $\gamma_{yz} = 0$. To znamená, že bude

$$\tau_{yz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad . \tag{14.4}$$

vány tedy dají

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -X \quad ,$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -Y \quad ,$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -Z \quad .$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right]$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right]$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right]$$

Jediné nenulové složky tenzoru napětí jsou tedy τ_{xy}, τ_{xz} (obr. 68).

Když z rovnic (14.1) a (14.4) dosadíme do rovnic rovnováhy (13.3), ve kterých $X = Y = Z = 0$ (objemové síly neuvažujeme), dostaneme tyto vztahy:

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0 \quad . \tag{14.5}$$

Poslední dvě z těchto rovnic vyjadřují nezávislost smykových napětí na souřadnici x (napjatost bude ve všech průřezech stejná). Abychom vyhověli první z rovnic (14.5), vyjádříme τ_{yx}, τ_{zx} pomocí jediné funkce napětí $\Phi = \Phi(y,z)$ takto:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad , \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad . \tag{14.6}$$

Tím budou všechny podmínky rovnováhy identicky splněny. Zároveň se tímto obratem zmenší počet neznámých funkcí.

Nyní je třeba vyhovět rovnicím kompatibility. Na pravých stranách (13.8) budou podle (14.1) a (13.4) nuly. Na levých stranách však budou také nuly, neboť podle (14.4) je $\gamma_{yz} = 0$ a zkosy γ_{xy}, γ_{xz} nezávisí na x, takže jejich derivace podle x jsou nulové. Zbývá vyhovět rovnicím (13.9). Na levých stranách budou nuly. Dasadíme-li do pravých stran místo zkosů příslušná smyková napětí (modul pružnosti ve smyku se bude krátit), dostaneme z druhé a třetí z rovnic (13.9)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial z}\right] = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}\right] = 0 \quad . \tag{14.7}$$

Do těchto rovnic dosadíme ze vztahů (14.6):

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right] = 0 \quad ,$$

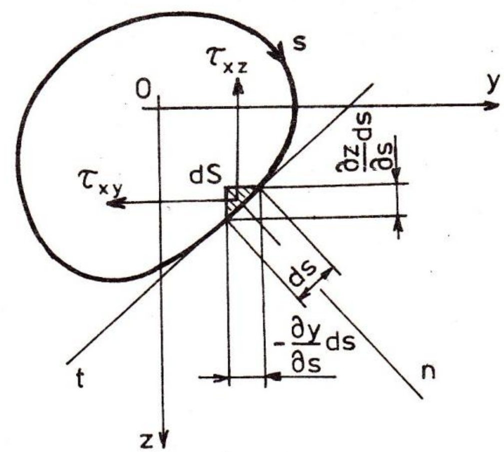
$$-\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right] = 0 \quad . \tag{14.8}$$

Výraz v hranaté závorce nezávisí tedy ani na y , ani na z . Musí být pr
to konstantní. To znamená, že rovnice kompatibility budou splněny, jestli

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = K = \text{konst} . \qquad (14.9)$$

Tím jsme získali diferenciální rovnici pro funkci napětí. Zbývá splnit ok
jové podmínky a určit význam konstanty K .

Prozatím se zabýváme kroucením tyče plného průřezu, tzn. že průřez t
ří jednoduše souvislá oblast. Vyšetříme, jakým podmínkám musí vyhovovat n
pětí na okraji průřezu (obr. 69). Boční povrch tyče není zatížen, takže



OBR. 69

sdružené smykové napětí $\tau_{xn} = 0$. Silové složky $\tau_{xy}dS, \tau_{xz}dS$ se prot
skládají ve výslednici, která má směr tečny k obrysu (síla $\tau_{xn}\,dS$ ve směr
normály musí být nulová). Musí tedy být

$$\tau_{xz}\, dS \cos(n,z) + \tau_{xy}\, dS \cos(n,y) = 0 \quad . \qquad (14.10)$$

Podle obr. 69 je

$$\cos(n,y) = \cos(t,z) = \frac{\partial z}{\partial s} \quad ,$$

$$\cos(n,z) = \cos(t,y) = -\frac{\partial y}{\partial s} \quad . \qquad (14.11)$$

Z rovnic (14.11) a (14.6) dosadíme do (14.10). Bude

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = 0 \quad . \tag{14.12}$$

To znamená, že

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0 \quad . \tag{14.13}$$

Tato podmínka platí, jestliže Φ = konst. na okraji průřezu. Protože se napětí získávají z funkce napětí podle (14.6) parciálními derivacemi, nezávisí řešení na aditivní konstantě. Můžeme proto bez újmy na obecnosti zvolit $\Phi = 0$ na okraji (na hranici) průřezu.

Poissonova parciální diferenciální rovnice (14.9) představuje spolu s okrajovou podmínkou $\Phi = 0$ na hranici definiční oblasti tzv. Dirichletův problém. Metody jeho řešení najdeme v učebnicích matematiky.

Je třeba se ještě přesvědčit, že nalezené řešení odpovídá skutečně čistému krutu (a nikoli např. smyku). Elementární síly v průřezu o složkách $\tau_{xy}\, dS$, $\tau_{xz}\, dS$ se proto musí skládat ve výsledný kroutící moment M_k a nesmí dávat žádnou výslednou sílu. Musí proto platit, že

$$\int_S \tau_{xy}\, dS = 0 \quad , \qquad \int_S \tau_{xz}\, dS = 0 \quad , \tag{14.14}$$

$$\int_S (\tau_{xz}\, y - \tau_{xy}\, z)\, dS = M_k \quad . \tag{14.15}$$

Přesvědčíme se nejprve o platnosti první z rovnic (14.14). Podle (14.6) musí být

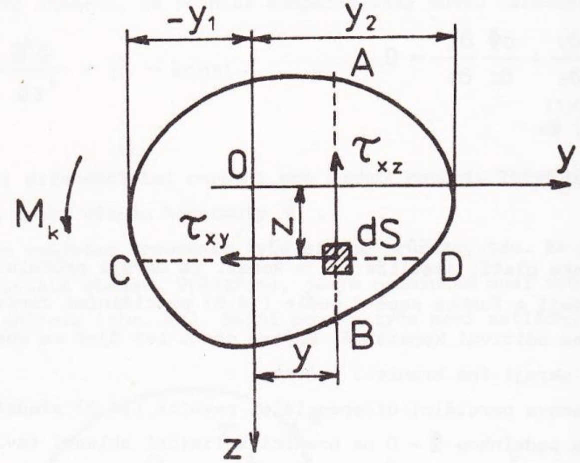
$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial z}\, dS = 0 \quad . \tag{14.16}$$

Zvolíme $dS = dy\, dz$ (obr. 70). Bude

$$\int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_A}^{z_B} \frac{\partial \Phi}{\partial z}\, dz = 0 \quad . \tag{14.17}$$

Avšak

$$\int_{z_A}^{z_B} \frac{\partial \Phi}{\partial z}\, dz = \Phi_B - \Phi_A = 0 \quad , \tag{14.18}$$



OBR. 70

neboť body A, B jsou na okraji průřezu, kde je $\Phi = 0$. Takže levá strana (14.17) je skutečně nulová a podmínka (14.16) splněna. Důkaz platnosti druhé z rovnic (14.14) je obdobný.

Rovnice (14.15) požaduje, aby

$$M_k = -\int \frac{\partial \Phi}{\partial y} y \, dy \int dz - \int \frac{\partial \Phi}{\partial z} z \, dz \int dy \quad . \tag{14.19}$$

Vypočteme nejprve integrací per partes při konstantním z podle obr. 70

$$\int \frac{\partial \Phi}{\partial y} y \, dy = \left[\Phi y \right]_C^D - \int \Phi \, dy =$$

$$= \Phi_D y_D - \Phi_C y_C - \int \Phi \, dy = - \int \Phi \, dy \quad . \tag{14.20}$$

Je totiž $\Phi_C = 0$, $\Phi_D = 0$. První člen na pravé straně (14.19) tedy dává

$$- \int \frac{\partial \Phi}{\partial y} y \, dy \int dz = + \iint \Phi \, dy dz \quad . \tag{14.21}$$

Druhý člen dává totéž, takže

$$M_k = 2\iint \Phi \, dy\, dz = 2\int \Phi \, dS \quad . \tag{14.22}$$

Integrál na pravé straně (14.22) představuje objem vrchlíku uzavřeného plochou $\Phi(y,z)$ nad daným průřezem. Kroutící moment je dvojnásobkem tohoto objemu.

Zbývá vyšetřit deformace. Pro posuvy (14.3) dává soustava rovnic (13.4) a (13.5) tyto podmínky:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{G}\frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad , \tag{14.23}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{G}\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad , \tag{14.24}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad . \tag{14.25}$$

Rovnici (14.23) zderivujeme podle z, rovnici (14.24) podle y a pak obě rovnice odečteme; tak se podaří vyloučit proměnnou u. S použitím (14.9) dostaneme

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{1}{G}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) = \frac{K}{G} \quad . \tag{14.26}$$

Pomocí (14.25) odtud eliminujeme posuv v. Bude

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{K}{2G} \quad . \tag{14.27}$$

Integrací při konstantním x vyjde

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{K}{2G}\, y + f_1(x) \quad . \tag{14.28}$$

Podle (14.24) však nemůže derivace $\partial w/\partial x$ záviset na x, neboť ani u, ani Φ na této souřadnici nezávisí. Musí proto být $f_1(x) =$ konst. Rovnici (14.28) přepíšeme do příhodnějšího tvaru

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{K}{2G}\,(y - y_0) \quad , \tag{14.29}$$

kde y_0 je zatím neznámá integrační konstanta. Jestliže průřez v rovině $x = 0$ se nepootočí ani neposune, bude $w(x=0) = 0$. Integrací (14.29) získáme vztah

$$w = -\frac{K}{2G}\, x\, (y - y_0) \qquad (14.30)$$

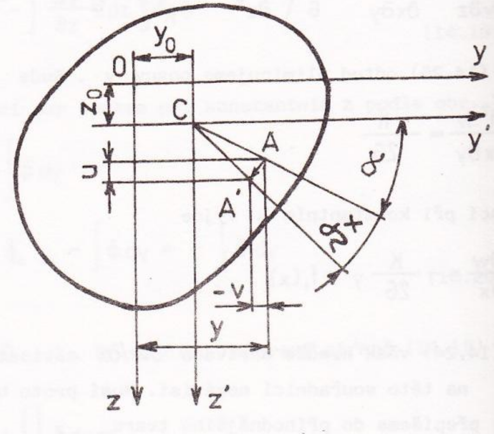
Rovnice (14.25) pak dává

$$v = -\int \frac{\partial w}{\partial y}\, dz = \frac{K}{2G}\, x\, (z - z_0) \qquad (14.31)$$

Nyní již můžeme objasnit význam konstanty K. Předpokládejme, že se daný průřez pootočí kolem bodu (y_0, z_0) o malý úhel $\varphi = \vartheta x$ (ϑ je zkrut).
Podle obr. 71 bude

$$\begin{aligned} v &= -\,r\varphi \sin\alpha = -\varphi\,(z - z_0) = \\ &= -\vartheta x\,(z - z_0) \quad , \end{aligned} \qquad (14.32)$$

$$\begin{aligned} w &= r\varphi \cos\alpha = \varphi\,(y - y_0) = \\ &= \vartheta x\,(y - y_0) \end{aligned} \qquad (14.33)$$



OBR. 71

Srovnáním s rovnicemi (14.31) a (14.30) dostaneme vztah

$$K = -2G\vartheta \quad . \tag{14.34}$$

Chceme-li znát ještě posuv u, tedy deplanaci průřezu, dosadíme z rovnice (14.32) do vztahu (14.23):

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \vartheta(z - z_0) = \frac{1}{G}\,\frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad . \tag{14.35}$$

Z rovnice (14.24) dostaneme obdobně

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \vartheta(y - y_0) = -\frac{1}{G}\,\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad . \tag{14.36}$$

Derivujeme-li (14.35) podle y a (14.36) podle z a obě rovnice sečteme, dostaneme pro posuv u Laplaceovu rovnici (ve dvou proměnných y, z)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad . \tag{14.37}$$

Funkce $u = u(y,z)$ je tedy harmonická. Známe-li funkci napětí $\Phi(y,z)$, dostaneme posuv u integrací rovnice (14.35) nebo (14.36). Na integrační konstantě přitom nezáleží, neboť znamená posuv tyče jako tuhého celku, při němž se napjatost nemění.

Otevřenou zůstává ještě jedna otázka, totiž jaká je poloha samodružné osy $y = y_0$, $z = z_0$. Otáčení průřezů kolem této osy můžeme nahradit otáčením kolem jiné rovnoběžné osy, jakkoli zvolené, a posunutím celého tělesa jako tuhého celku. Toto posunutí nemá vliv ani na napjatost, ani na poměrné deformace. To znamená, že za samodružnou přímku můžeme zvolit kteroukoli přímku rovnoběžnou nebo totožnou se střednicí tyče. Je-li však některý průřez upevněn tak, že se nemůže v rovině (y, z) posunout, ztotožní se střed krutu o souřadnicích y_0, z_0 se středem smyku, takže samodružná osa už není libovolná. Vyplývá to z Bettiho věty a např. z obr. 72. Prochází-li síla F středem smyku, prut se účinkem této síly ohýbá, ale nezkrucuje, takže moment M_K na deformacích působených silou F žádnou práci nekoná. Proto se musí rovnat nule i práce síly F na deformacích působených kroutícím momentem M_K. Tak tomu je, když se působiště síly F při čistém krutu neposune – je to tedy střed krutu. Na směru síly F přitom nezáleží.