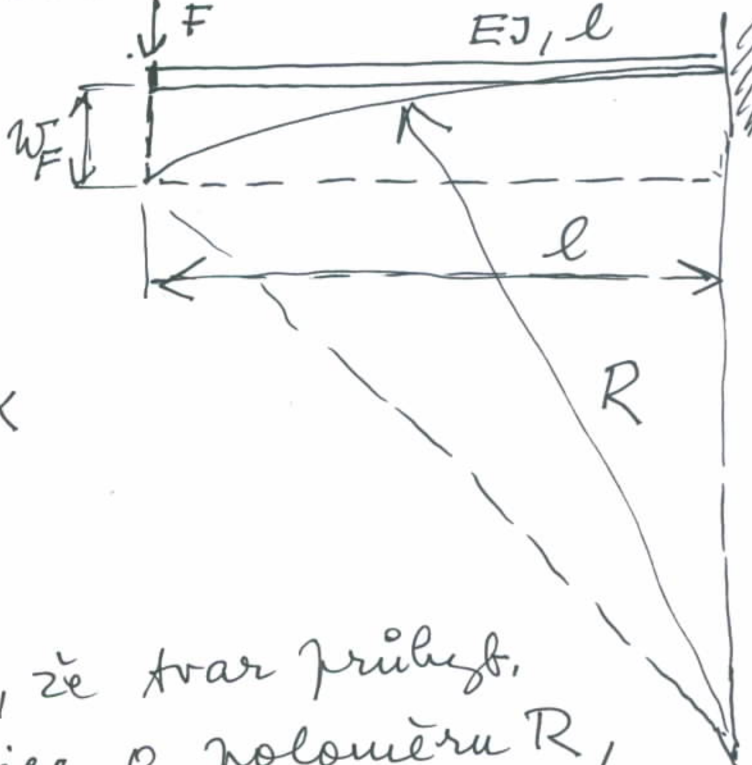
Princip minima celkové potenciální energie

$$\delta \Pi = 0 \qquad \Pi = U - W$$

Ze všech možných konfigurací zatíženého tělesa, které splňují okrajové podmínky pro posuvy, ty, které je celková potenciální energie minim., splňují i podmínky rovnováhy.

Příklad: Hledáme přibližné řešení pro průhyb vetknutého nosníku zatíženého silou na konci.



$$U = \int_{(l)} \frac{M^2(x)\,dx}{2EJ}$$

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{EJ}$$

$$U = \int_{(l)} \frac{EJ}{2} (w'')^2 \, dx$$

$$W = F \cdot w_F$$

Předpokládejme, že tvar průhyb. čáry je kružnice o poloměru R, platí $\frac{1}{R} \doteq w'' \Rightarrow U = \int_0^l \frac{EJ}{2} \left(\frac{1}{R}\right)^2 dx$

z pravoúhl. trojúh.:

$$w_F = R - \sqrt{R^2 - l^2} = R - R\sqrt{1 - \left(\frac{l}{R}\right)^2} \qquad \frac{l}{R} \ll 1$$

$$w_F \doteq R\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{R}\right)^2\right)\right) = \frac{1}{2}\frac{l^2}{R}$$

$$\Pi = U - W = \frac{EJ}{2} \cdot \frac{1}{R^2} l - F \cdot \frac{1}{2}\frac{l^2}{R}$$

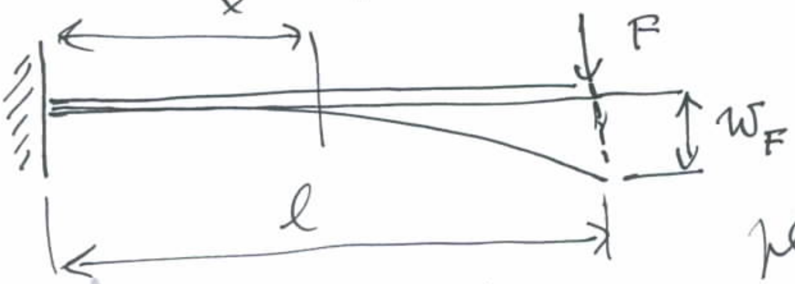
Změníme-li průhyb o δR, pak

$$\delta\Pi = \frac{EJ}{2}(-2)\frac{1}{R^3}\delta R\, l - F\cdot\frac{1}{2}l^2(-1)\frac{1}{R^2}\delta R = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{Fl}{2EJ} \quad a \quad w_F = \frac{Fl^3}{4EJ}$$

Známe přesné řešení z PP1 $w_{F_{DR}} = \dfrac{Fl^3}{3EJ}$

Navrhněme jiné přibližné řešení:



$$w(x) = w_F\cdot\left(1-\cos\frac{\pi x}{2l}\right)$$

platí $w(0) = 0$

$w'(0) = 0$

$w(l) = w_F$

$$w'(x) = w_F\cdot\left(\frac{\pi}{2l}\right)\cdot\sin\frac{\pi x}{2l}$$

$$w''(x) = w_F\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2\cos\frac{\pi x}{2l}$$

$$U = \int_0^l \frac{EJ}{2}(w'')^2\,dx = \frac{EJ}{2}w_F^2\left(\frac{\pi}{2l}\right)^4\cdot\int_0^l\cos^2\frac{\pi x}{2l}\,dx =$$

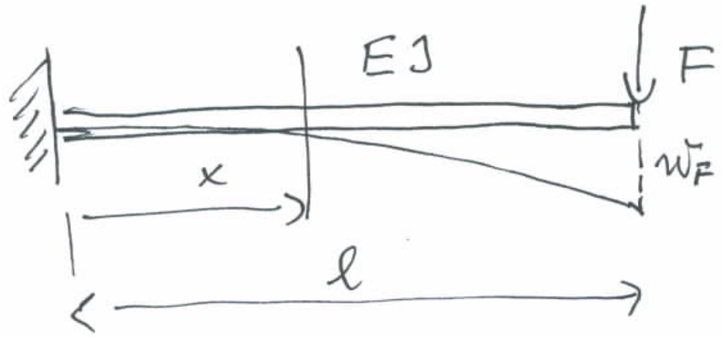
$$= \frac{EJ}{2}\cdot w_F^2\left(\frac{\pi}{2l}\right)^4\cdot\frac{l}{2}$$

$$\Pi = \frac{EJ}{2}w_F^2\left(\frac{\pi}{2l}\right)^4\frac{l}{2} - F\cdot w_F$$

Změníme průhyb o δw_F:

$$\delta\Pi = EJ\, w_F\cdot\delta w_F\cdot\left(\frac{\pi}{2l}\right)^4\cdot\frac{l}{2} - F\cdot\delta w_F = 0$$

$$\Rightarrow w_F = \frac{32}{\pi^4}\frac{Fl^3}{EJ} = 0{,}3285\,\frac{Fl^3}{EJ}$$



předpokládejme

$w(x) = a + bx + cx^2$

musí platit

$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0$

$\Rightarrow a = b = 0$

$w(x) = cx^2$

$w_F = cl^2$

$w'(x) = 2cx$

$w''(x) = 2c$

$$U = \int_0^l \frac{EJ}{2} (2c)^2 dx$$

$$W = F \cdot cl^2$$

$$\Pi = U - W = \frac{EJ}{2} 4c^2 l - Fcl^2$$

změníme δc | $\delta\Pi = 4EJc\,\delta c\, l - F\delta c\, l^2 = 0$

$$c = \frac{Fl}{4EJ} \qquad w_F = \frac{Fl^3}{4 \cdot EJ}$$

Předpokládejme $w(x) = cx^2 + dx^3$

$w_F = cl^2 + dl^3$

$w'(x) = 2cx + 3d \cdot x^2$

$w''(x) = 2c + 6d \cdot x$

$$U = \frac{EJ}{2} \int_0^l (2c + 6d \cdot x)^2 dx =$$

$$= \frac{EJ}{2} \left(4c^2 l + 24cd \frac{l^2}{2} + 12d^2 l^3\right)$$

$$\Pi = EJ(2c^2 l + 6cdl^2 + 6d^2 l^3) - F(cl^2 + dl^3)$$

máme dva parametry (posuvy) c a d

1) změníme $\delta c \neq 0$, d zůstane konst ($\delta d = 0$)

2) změníme $\delta d \neq 0$, c zůstane konst $(\delta c = 0)$

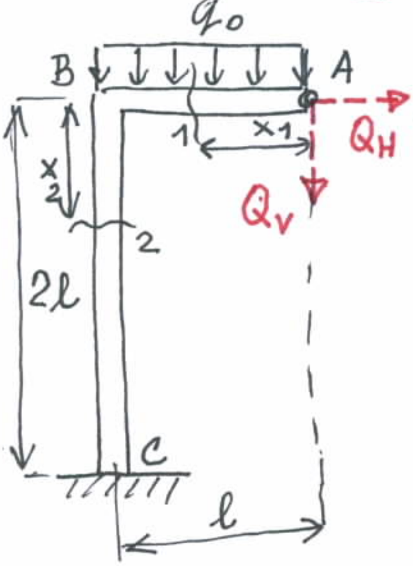
$$1)\quad \delta\Pi = EJ\left(4c\,\delta c\, l + 6\,\delta c\, d\, l^2\right) - F\,\delta c \cdot l^2 = 0$$

$$2)\quad \delta\Pi = EJ\left(6c\,\delta d\, l^2 + 12d\,\delta d\, l^3\right) - F\,\delta d\, l^3 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} 4cl + 6dl^2 &= \frac{Fl^2}{EJ} \\ 6cl^2 + 12dl^3 &= \frac{Fl^3}{EJ} \end{aligned}\right\} \quad c = \frac{Fl}{2EJ}, \qquad d = -\frac{F}{6EJ}$$

$$w(x) = \frac{F}{EJ}\left(\frac{1}{2} l x^2 - \frac{x^3}{6}\right) \qquad w(l) = w_F = \frac{Fl^3}{3EJ}$$

= přesné řešení



Ocelová tyč je zatížená rovnoměrně spojitě silou $q_0 [N/m]$. Má všude stejný kruhový průřez $\varnothing d$. Určete svislý a vodorovný posuv bodu A. Použijte Castiglianovu větu.

$$w = \frac{\partial U}{\partial F}$$

která platí pro ocel (lineárně elastický materiál, který se řídí Hookeovým zák.)

Dáno: q_0, l, d, E

Řešení: v bodě A nepůsobí vnější síly ve směru požadovaných posuvů, připojíme tam tedy dvě síly Q_H a Q_V a posuvy vypočteme jako:

$$w_H = \left.\frac{\partial U}{\partial Q_H}\right|_{Q_H=0} , \quad w_V = \left.\frac{\partial U}{\partial Q_V}\right|_{Q_V=0}$$

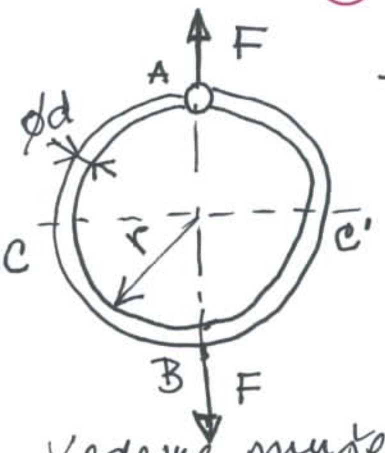
Tyč je ohýbaná (deformační energie od ohybových momentů je větší, než od ostatních vnitřních sil)

Platí: $U = \int_{(l)} \frac{M_o^2\, dx}{2EJ_y}$, $\frac{\partial U}{\partial Q} = \int_{(l)} \frac{M_o \cdot \frac{\partial M_o}{dQ} dx}{EJ_y}$

	M_i	$\partial M_i/\partial Q_H$	$\partial M_i/\partial Q_V$	meze
1	$Q_V \cdot x_1 + q_0 \frac{x_1^2}{2}$	0	x_1	$0, l$
2	$Q_V \cdot l + q_0 \frac{l^2}{2} + Q_H \cdot x_2$	x_2	l	$0, 2l$

$$w_H = \frac{1}{EJ_y} \int_0^{2l} q_0 \frac{l^2}{2} \cdot x_2\, dx_2 ; \quad w_V = \frac{1}{EJ_y} \left\{ \int_0^{l} q_0 \frac{x_1^2}{2} x_1\, dx_1 + \int_0^{2l} \frac{q_0 l^2}{2} l \cdot dx_2 \right\}$$

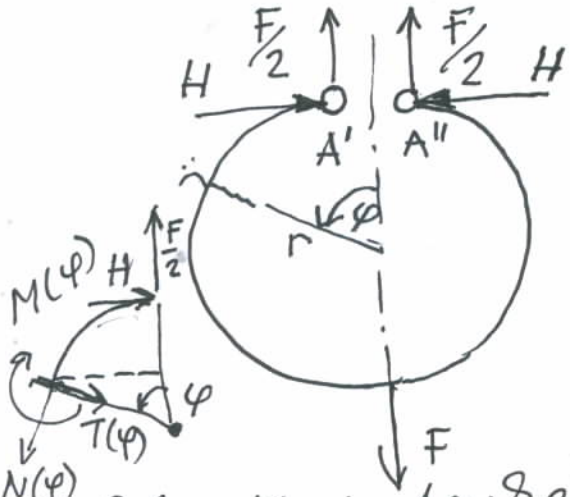
Síly Q_H a Q_V můžeme vynechat po vypočtení derivací vnitřních momentů podle těchto sil.



Tenká kruhová obruč ($d \ll r$) s kloubem v b. A je zatížená v ose symetrie silami F. Určete maximální vnitřní ohybový moment.

Dáno: $F, r, \varnothing d, E$

Řešení: Kloub A nepřenáší moment.
Vedeme myšlený řez v bodě A.
Síla F v bodě A se rozdělí stejným dílem na levou a pravou část obruče. Na oba konce musí působit ještě vodorovná síla jinak by se konce od sebe vzdalovaly. Síla H je staticky neurčitá (nelze ji vypočítat z podmínek rovnováhy). Musí platit:



$$\frac{\partial U}{\partial H} = 0 \qquad U = \int_{(\varphi)} \frac{M^2(\varphi)}{2EJ} \cdot r\,d\varphi$$

Obruč je tenká – deformační energie od ohybu bude převažující, def. energ. od ostatních vnitř. sil zanedbáme. Obruč je symetrická $U = 2U_{1/2}$

$$M(\varphi) = \frac{F}{2} r \sin\varphi - H r(1-\cos\varphi) \qquad \frac{\partial M(\varphi)}{\partial H} = -r(1-\cos\varphi)$$

$$\frac{\partial U}{\partial H} = 2 \cdot \frac{1}{EJ} \int_0^{\pi} M(\varphi) \cdot \frac{\partial M(\varphi)}{\partial H} \cdot r\,d\varphi = \frac{2}{EJ} r^3 \int_0^{\pi} \left[\frac{F}{2}\sin\varphi - H(1-\cos\varphi)\right] \cdot$$

$$\cdot (-1)(1-\cos\varphi)\,d\varphi \stackrel{!}{=} 0$$

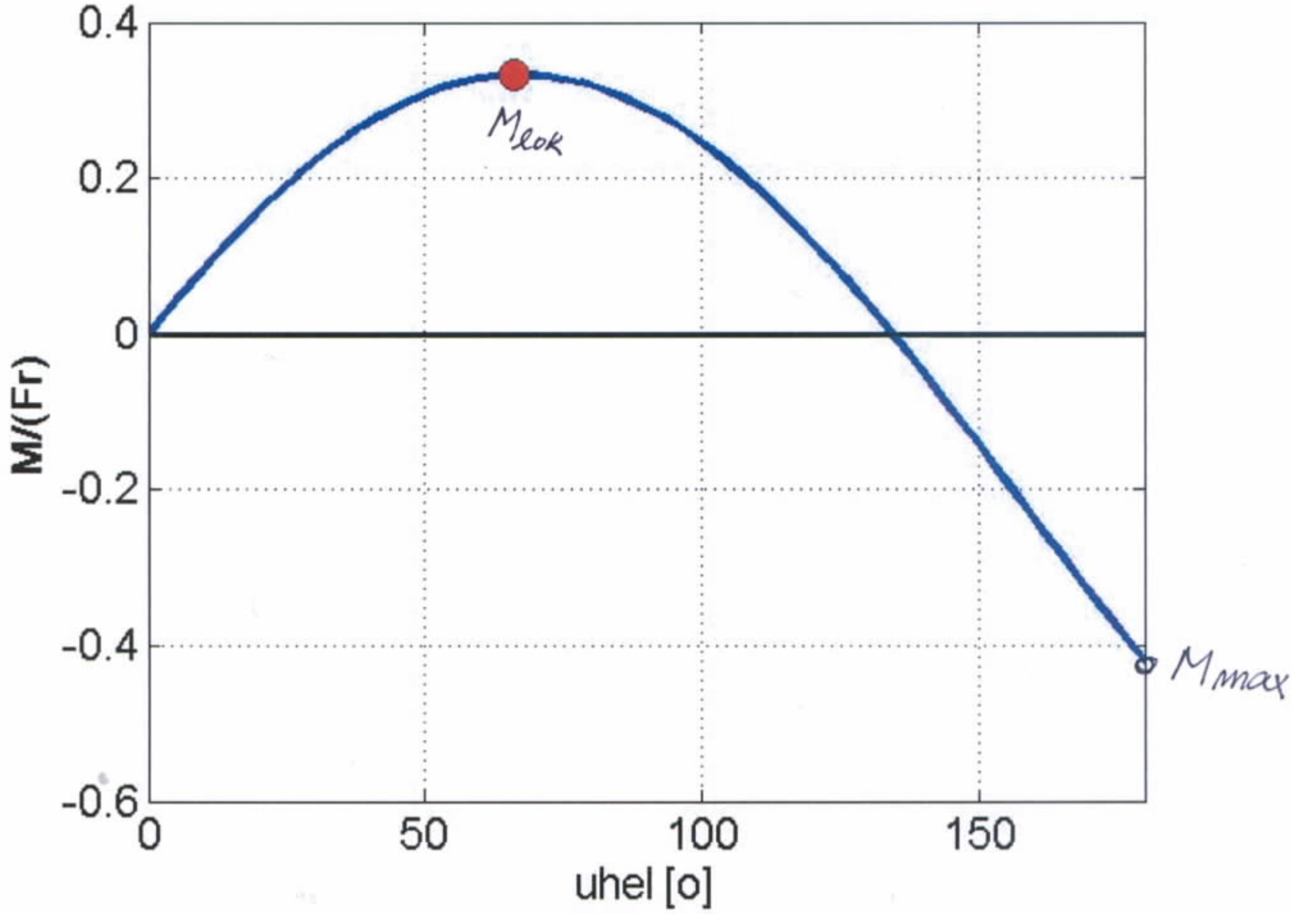
$$H = \frac{2F}{3\pi} \doteq 0{,}21F$$

Maximální moment v místě $\frac{\partial M(\varphi)}{\partial \varphi} = 0$ $\quad 0 = Fr\left(\frac{1}{2}\cos\bar{\varphi} - 0{,}21\sin\bar{\varphi}\right)$

$\bar{\varphi} = 67{,}2°$

$M(\bar{\varphi}) = 0{,}33\,Fr$

ale: $M_{max} = M(\pi) = -0{,}42\,Fr$



Graf vnitřního ohybového momentu v závislosti na úhlu. Moment má lokální maximum M_{lok}=0,33 Fr, avšak maximum momentu je na ose symetrie pod silou F a to M_{max}=0,42 Fr.