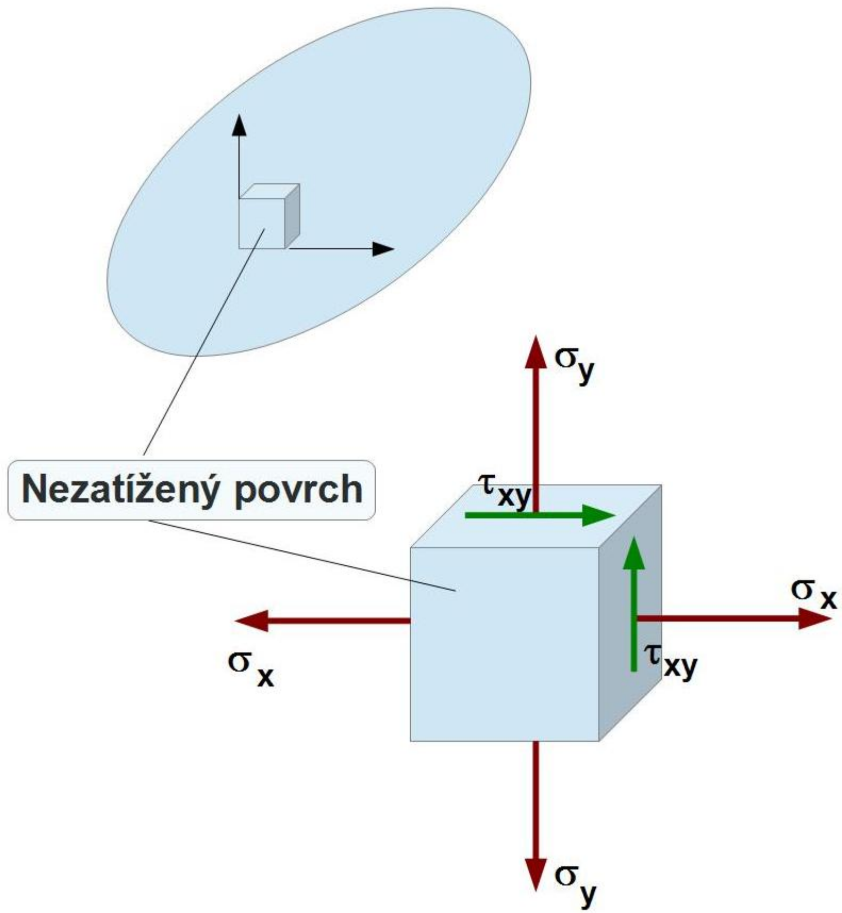
PP2

Rovinná napjatost – rovinné přetvoření

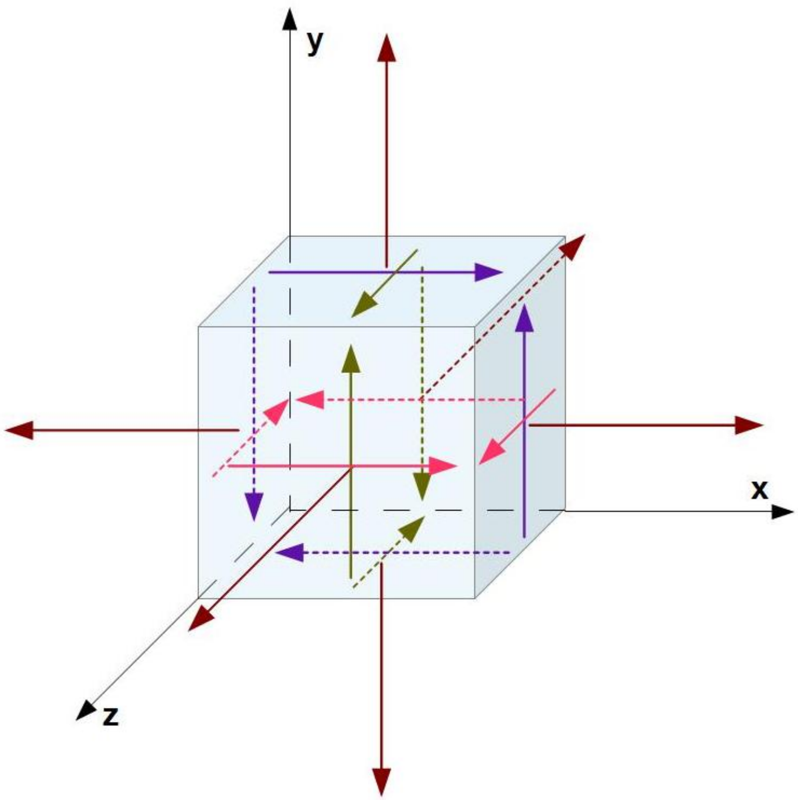
Rovinná napjatost

Rovinná napjatost je všude na nezatíženém povrchu těles, nebo v tělese, které má jeden ze svých rozměrů (ve směru osy *z* zvoleného souřadného systému) mnohem menší, než rozměry ve směru *x* a *y* (tenká deska, plech, disk apod.)
Jestliže osu *z* souřadného systému zvolíme ve směru normály k nezatíženému povrchu, pak budou nulové složky napětí

$$\sigma_z = 0, \tau_{xz} = 0, \ \tau_{yz} = 0.$$



Dohoda o znaménku

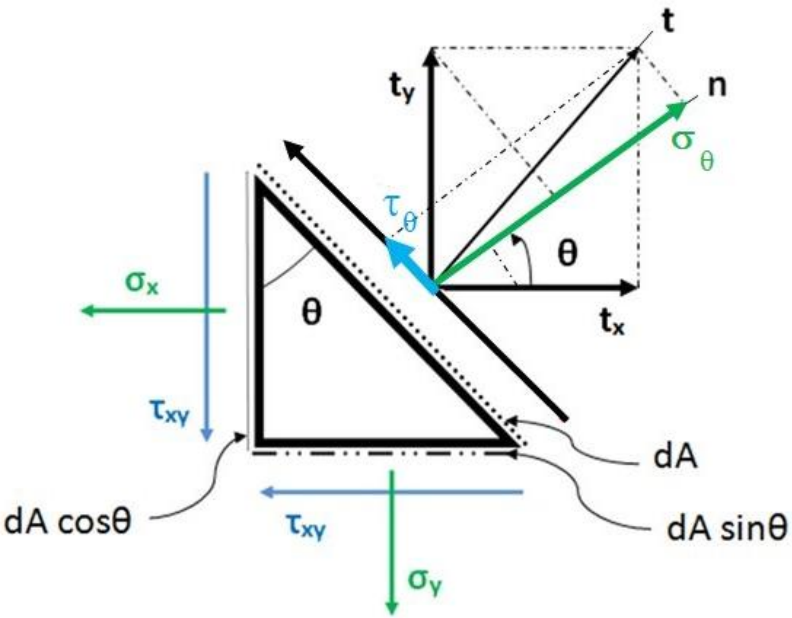


a) Kladné strany elementu na obrázku jsou ty, které jsou viditelné - jsou vzdálenější od počátku (o přírůstek dx, dy, n. dz) než strany záporné.

b) Kladné napětí je takové, které na kladné straně elementu působí v kladném smyslu osy souřad. a na záporné straně elementu v záporném smyslu osy (++ n. - -)

Tahová normálná napětí jsou kladná, talková napětí jsou záporná.
Napětí zakreslená na obrázku jsou všechna kladná.

Napětí v nakloněném řezu, jeho normála svírá úhel θ s osou *x*



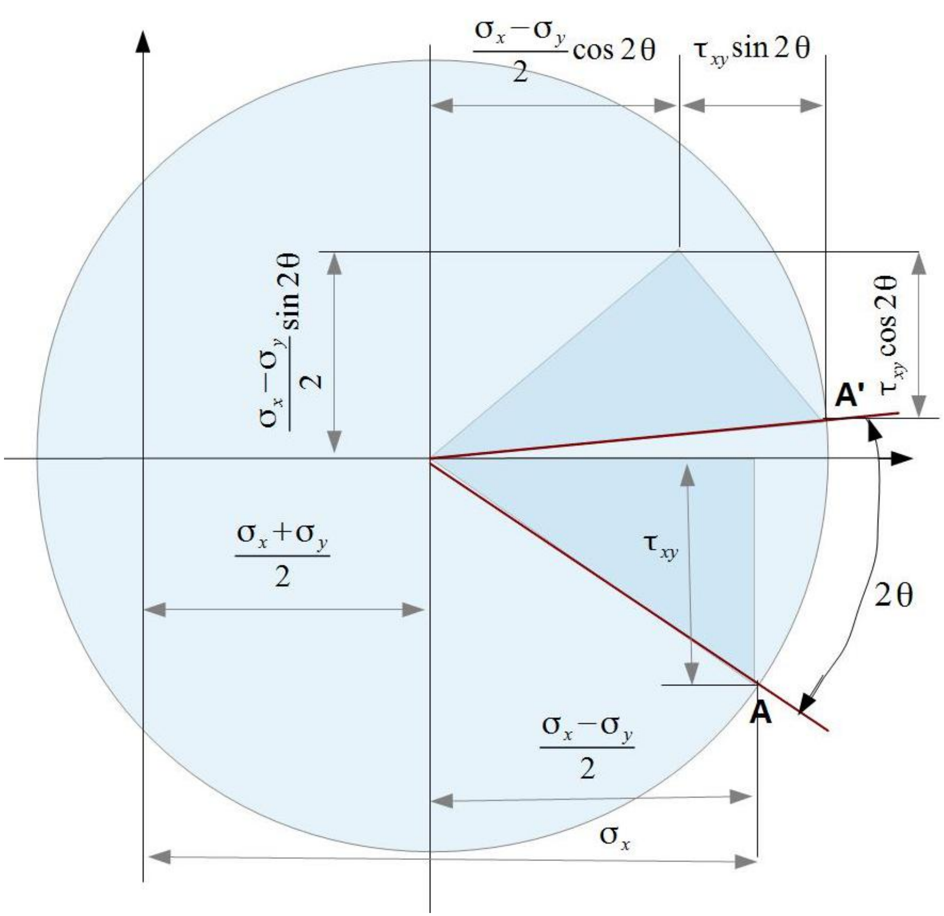
Podmínky rovnováhy elementu do směru normály n a tečny:

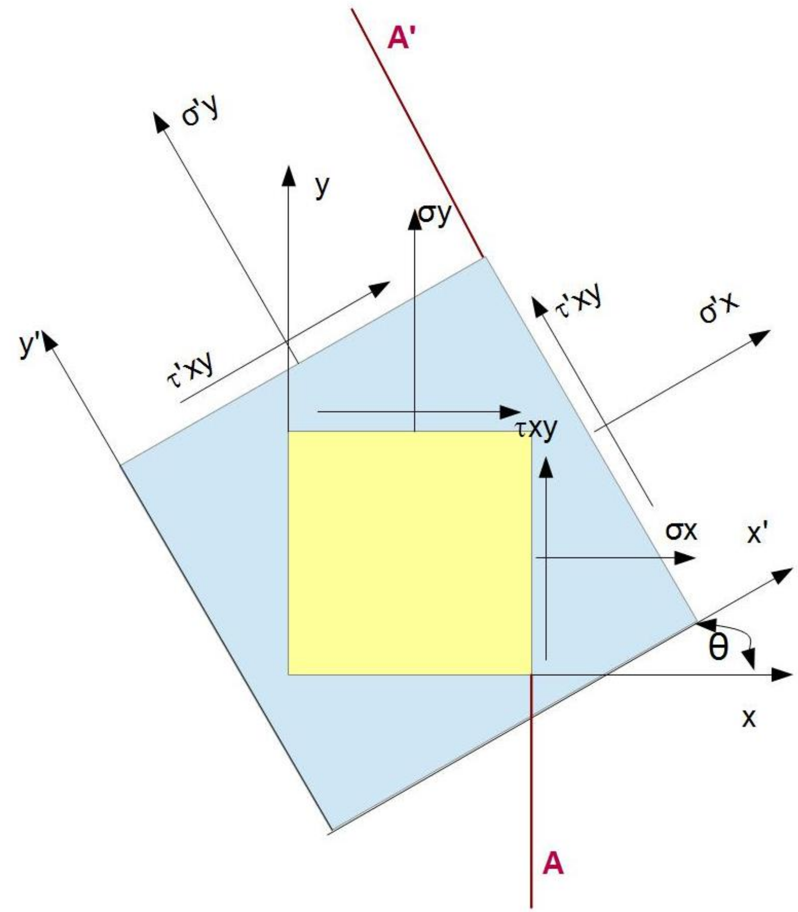
Transformační vztahy pro napětí můžeme upravit na parametrické rovnice kružnice v osách σ-τ , parametr je 2θ:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta,$$

$$\tau_\theta = -\frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta.$$

Transformace složek napětí do pootočeného souřadného systému

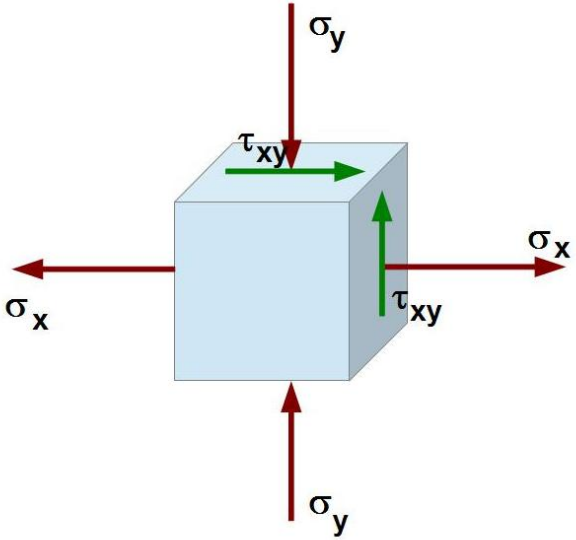




Dohoda o znaménku smykového napětí pro Mohrovu kružnici: smykové napětí, které by otáčelo elementem ve směru hodin. ručiček, vynášíme v kladném smyslu osy τ

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)+\frac{1}{2}\left(\sigma_x-\sigma_y\right)\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta,$$

$$\tau_\theta = -\frac{1}{2}\left(\sigma_x-\sigma_y\right)\sin 2\theta+\tau_{xy}\cos 2\theta.$$



Příklad

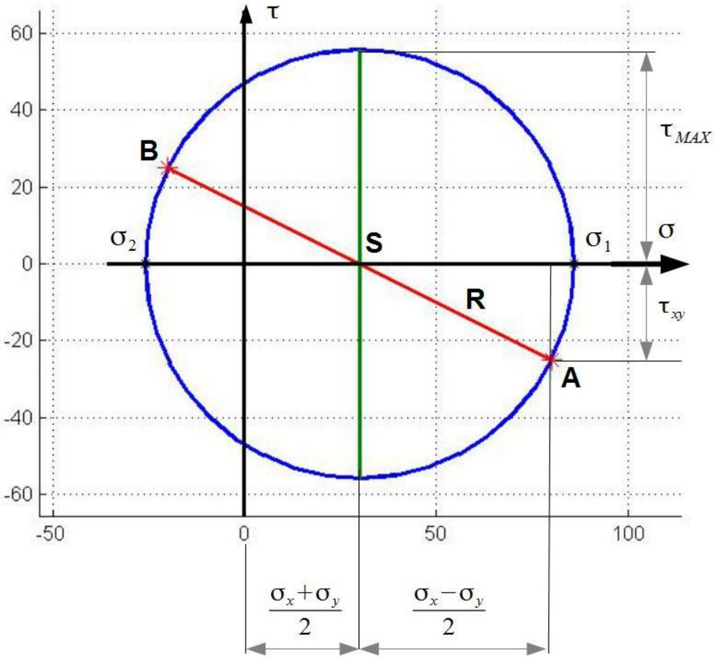
Jsou dány složky dvouosé napjatosti – viz obrázek:

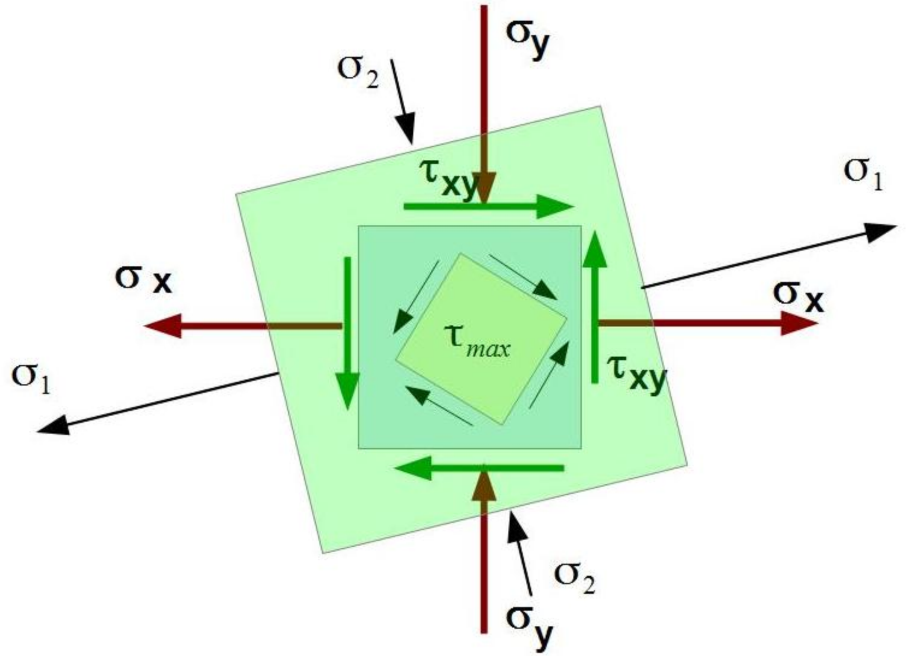
$$\sigma_x = 80\,MPa,\ \sigma_y = -20\,MPa,\ \tau_{xy} = 25\,MPa.$$

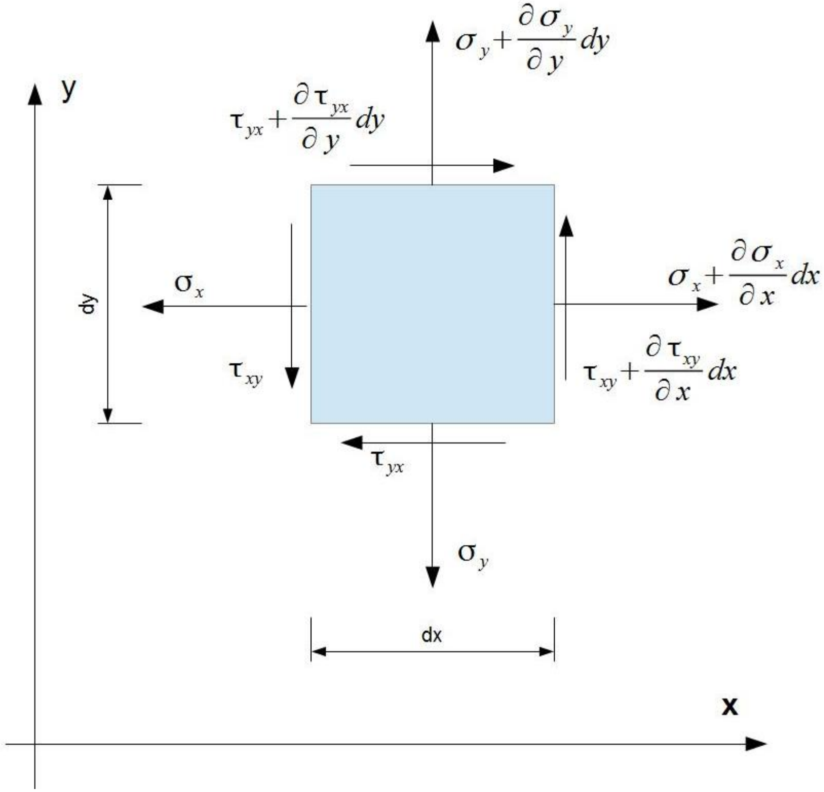
Zakresleme Mohrovu kružnici a určeme hlavní napětí, hlavní směry a maximální smykové napětí a jeho roviny.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = [85{,}9;\, -25{,}9]\,MPa$$

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{2} arctg \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \left[13{,}3^o;\, 103{,}3^o\right];\ \tau_{\max} = R = 55{,}9\,MPa.$$







Podmínky rovnováhy

Složky napětí σ_x, σ_y a τ_{xy} musí být spojitými funkcemi souřadnic *x* a *y.*
X,Y= zatěžující síly na jednotku objemu (vlastní tíže, odstředivá síla, Lorentzova magnetická síla apod.)

$$-\sigma_x dydz+\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dydz-\tau_{yx}dxdz+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dxdz+Xdxdydz=0,$$

$$-\tau_{xy}dydz+\left(\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx\right)dydz-\sigma_y dxdz+\left(\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy\right)dxdz+Ydxdydz=0,$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X=0,$$

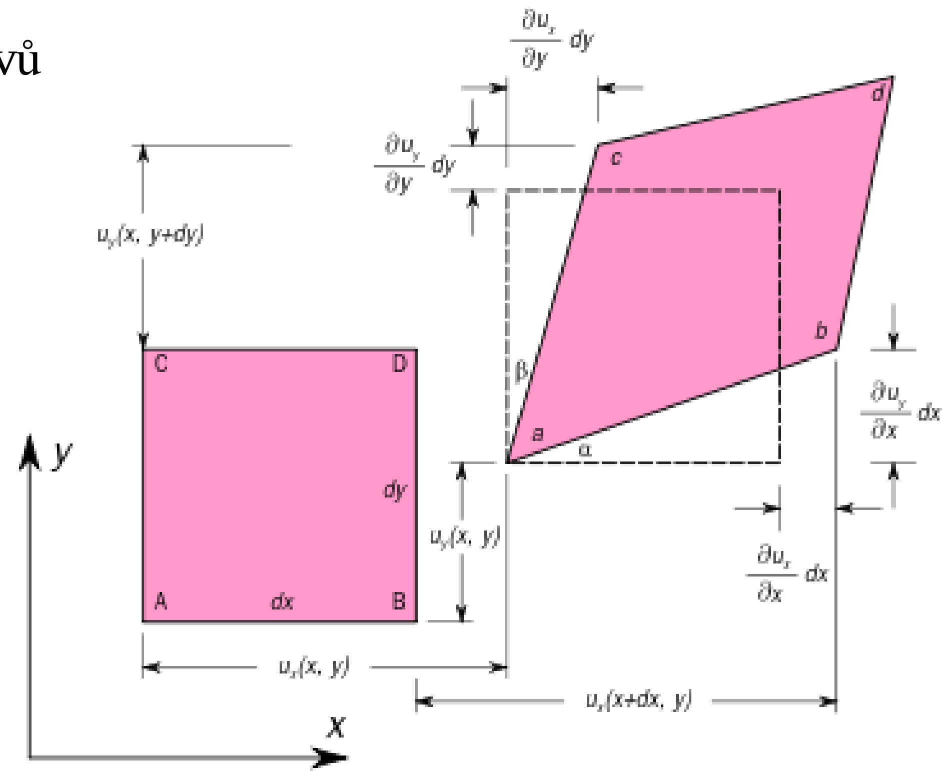
$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+Y=0,\qquad\qquad \tau_{xy}=\tau_{yx}.$$

Vztahy mezi posuvem a přetvořením – kinematické vztahy

$u = (u_x, u_y, u_z)$ vektor malých posuvů

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y},$$

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}.$$



Rovnice kompatibility

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}.$$

Ze dvou složek vektoru posuvu u_x a u_y jsme odvodili tři složky tenzoru přetvoření ε_x, ε_y a γ_{xy}. Tyto tři složky tedy nemohou být nezávislé a musí být ve vzájemném vztahu tak, aby těleso po deformaci zůstalo celistvé (aby v něm nevznikly díry, nebo aby se jeho části navzájem neprostupovaly). Tento vztah získáme vyloučením složek posuvů z kinematických vztahů:

Derivujme dvakrát vztah pro γ_{xy} :

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y}, \quad \text{ale} \quad \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2},$$

analogicky pro $\dfrac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y}$, po dosazení $\Rightarrow$ *rovnice kompatibility* :

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}.$$

Hookeův zákon pro dvouosou napjatost:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right),$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right),$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \text{kde} \quad G = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}.$$

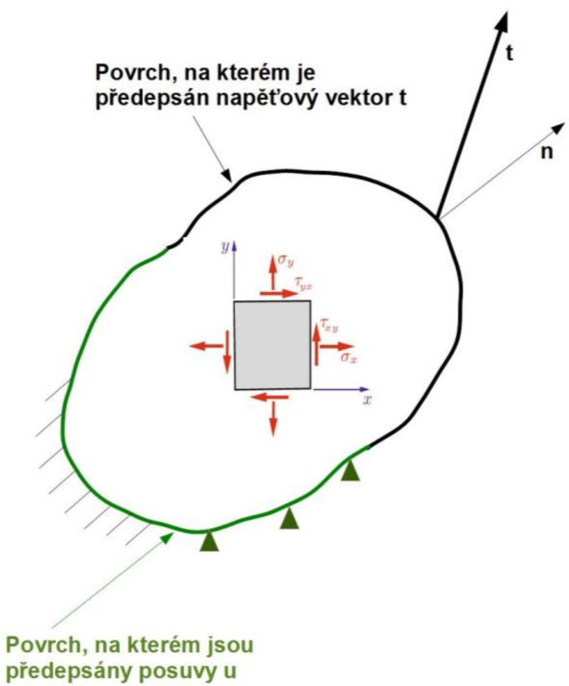
Inversní vztahy:

$$\sigma_x = \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right),$$

$$\sigma_y = \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right),$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}.$$

Okrajové podmínky



Okrajové podmínky jsou dvojího typu:

- Na části okraje tělesa jsou předepsány posuvy (v místě vetknutí, nebo v místě podpor)
- Na jiné části okraje tělesa je předepsán tzv. trakční vektor, zatížení, které má rozměr [Pa] a je rozloženo na jednotku plochy

Okrajové podmínky zapíšeme:

$$\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{u}} \Rightarrow u_x = \hat{u}_x, u_y = \hat{u}_y.$$

$$\sigma_{ij} n_j = \hat{t}_i \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(n, x) \\ \cos(n, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{t}_x \\ \hat{t}_y \end{Bmatrix}.$$