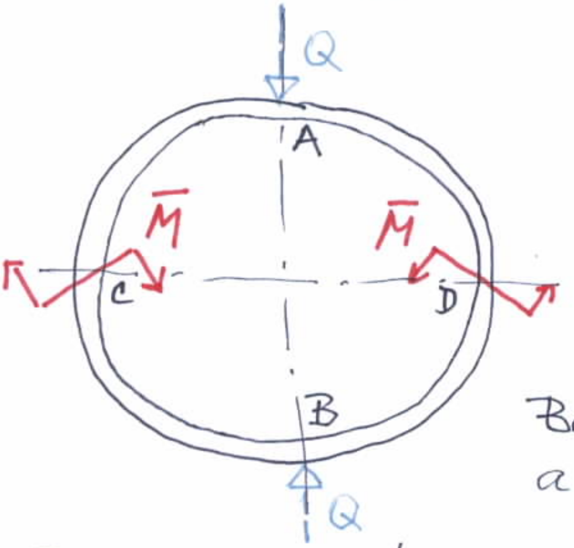
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
www.tul.cz
TKMOST



Tenká obruč je zatížená dvěma momenty $\bar{M}$. Pomocí Bettiho věty určete změnu průměru AB po zatížení.

Bettiho věta – viz C. Höschl Pružnost a pevnost II, Liberec 1992, str. 45:

Práce zobecněných sil první skupiny na zobec. posuvech vzniklých působením zobecněných sil druhé skupiny je stejná, jako práce zobec. sil druhé skupiny vykonaná na zobec. posuvech způsobených zobec. silami první skupiny.

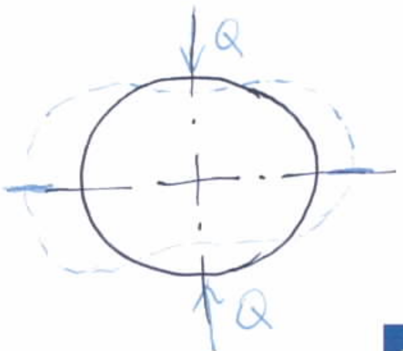
$$A^{I}_{II} = A^{II}_{I}$$

Na obruč působí I skupina zobec. sil, které jsou v rovnováze (momenty $\bar{M}$) a způsobí zobecněné posuvy v místech A a B. Připojíme v těchto bodech rovnovážnou soustavu sil II (Q), které vykonají práci na posuvech způsobených momenty

$$A^{II}_{I} = Q \cdot \Delta AB$$

Momenty $\bar{M}$ konají práci na natočeních způsobených silami Q v místech C a D

$$A^{I}_{II} = 2\bar{M} \cdot \varphi \qquad A^{I}_{II} = A^{II}_{I}$$

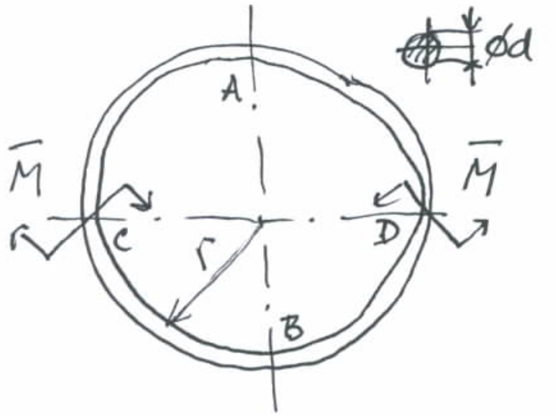


avšak síly Q nezpůsobí žádné natočení průřezů v místech C a D

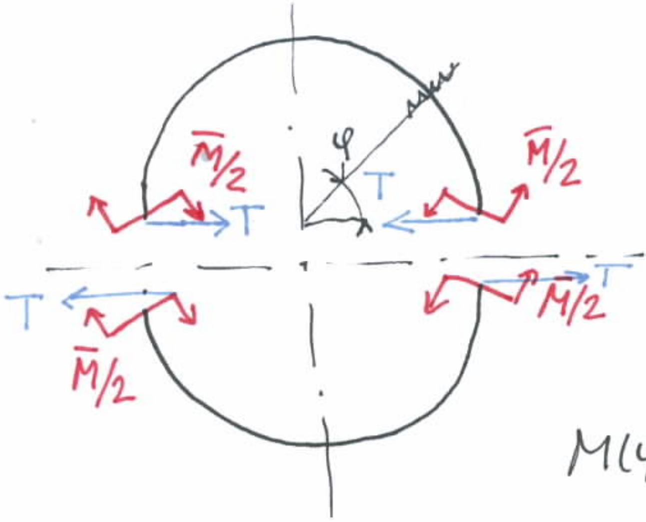
$\Rightarrow \Delta AB = 0$

Řešení bez využití Bettiho věty:

a) Určení vnitřních sil u obruče zatížené pouze momenty $\bar{M}$.



Úloha je antisymetrická – osa antisym. je C–D. Na ose antisym. působí pouze příčná vnitřní síla, ohybový moment a normálná síla jsou nulové.
Myšlený řez povedeme osou antisymetrie a rozdělíme obruč na dvě části. Zatěžující momenty se rozdělí rovným dílem na obě části. V myšleném řezu působí vnitřní příčná síla T, která je staticky neurčitá.
Z Castiglianovy věty: $\frac{\partial U}{\partial T} = 0$



$$M(\varphi) = \frac{\bar{M}}{2} - T \cdot r \sin\varphi \,, \quad \frac{\partial M(\varphi)}{\partial T} = -r\sin\varphi$$

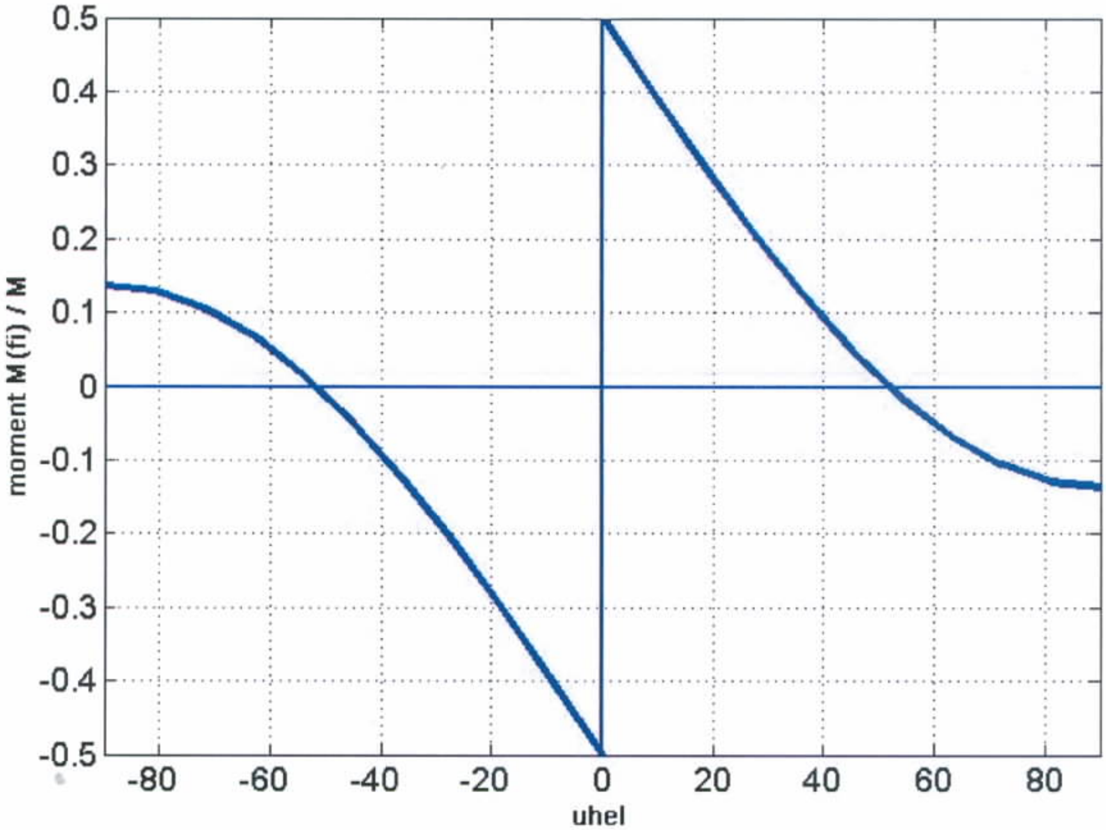
$U = 4U_{\frac{1}{4}}$ (vnitřní moment je stejný v každé $\frac{1}{4}$ obruče až na znaménko, ale def. energie je funkcí čtverce momentu)

$$\frac{\partial U}{\partial T} = 0 \Rightarrow \frac{4}{EJ}\int_0^{\pi/2} M(\varphi)\cdot\frac{\partial M(\varphi)}{\partial T}\, r\,d\varphi = \frac{4}{EJ}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\bar{M}}{2} - Tr\sin\varphi\right)(-r\sin\varphi)\, r\,d\varphi \overset{!}{=} 0$$

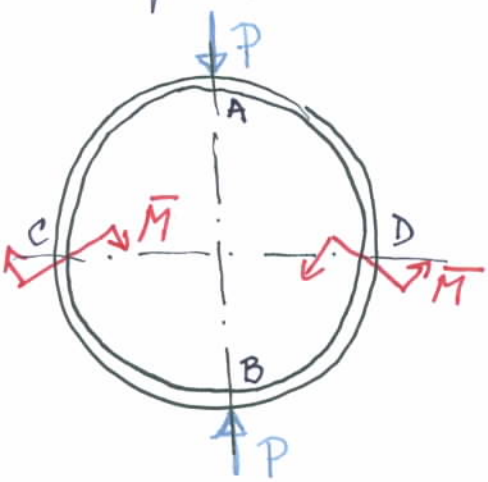
$$\Rightarrow -\frac{\bar{M}}{2} + \frac{\pi}{4} Tr = 0 \qquad T = \frac{2}{\pi}\frac{\bar{M}}{r} = 0{,}637\frac{\bar{M}}{r}$$

$$M\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0{,}1366\,\bar{M}$$

Průběh momentu je na násl. obrázku.

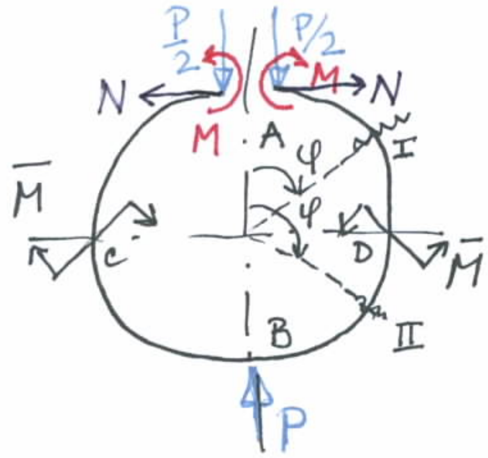


b) Pokud chceme vypočítat změnu průměru AB bez Bettiho věty, musíme připojit do bodů A a B síly P (které později položíme rovny 0) a derivovat podle nich deformační energii $\Delta AB = \left.\frac{\partial U}{\partial P}\right|_{P=0}$



Připojením sil P ztratila úloha antisymetrii (která by odebrala 2 stupně statické neurčitosti). Zůstala pouze symetrie podle osy A-B

Úloha je nyní 2x staticky neurčitá



V myšleném řezu A na ose symetrie působí staticky neurčité vnitřní síly = moment M a normálná síla N =>

$$\frac{\partial U}{\partial N}=0 \quad \frac{\partial U}{\partial M}=0 \quad a \quad \Delta_{AB}=\frac{\partial U}{\partial P}\bigg|_{P=0}$$

Vnitřní ohybové momenty v řezu I a II a jejich derivace

$$M_I(\varphi)=M-\frac{P}{2}r\sin\varphi-Nr(1-\cos\varphi)$$

$$M_{II}(\varphi)=M-\frac{P}{2}\cdot r\sin\varphi-Nr(1-\cos\varphi)-\overline{M}$$

$$U=2U_{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial P}=\frac{\partial M_{II}}{\partial P}=-\frac{r}{2}\sin\varphi$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial M}=\frac{\partial M_{II}}{\partial M}=1$$

$$\frac{\partial M_I}{\partial N}=\frac{\partial M_{II}}{\partial N}=-r(1-\cos\varphi)$$

V okamžiku, kdy vypočteme $\frac{\partial M_I}{\partial P}$ a $\frac{\partial M_{II}}{\partial P}$, můžeme položit ve vztazích $P=0$. Řešíme soustavu 3 rovnic

$$\frac{\partial U}{\partial M}=0 \quad \frac{2}{EJ}\left\{\int_0^{\pi}[M-Nr(1-\cos\varphi)]\cdot(1)\,r\,d\varphi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\overline{M}\cdot(1)\cdot r\,d\varphi\right\}=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial N}=0 \quad \frac{2}{EJ}\left\{\int_0^{\pi}[\quad -\|- \quad]\left[-r(1-\cos\varphi)\right]r\,d\varphi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\overline{M}\cdot[-r(1-\cos\varphi)]\,r\,d\varphi\right\}=0$$

$$\Delta AB=\frac{\partial U}{\partial P}\bigg|_{P=0} \quad \frac{2}{EJ}\left\{\int_0^{\pi}[\quad -\|- \quad]\left(-\frac{1}{2}r\sin\varphi\right)r\,d\varphi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\overline{M}\left(-\frac{1}{2}r\sin\varphi\right)r\,d\varphi\right\}=\Delta_{AB}$$

Z prvních dvou rovnic vyjde $M=-0{,}1366\,\overline{M}$, $N=-0{,}6366\,\frac{\overline{M}}{r}$ (viz řešení a))

a po dosazení do třetí rov. vyjde $\Delta AB=0$