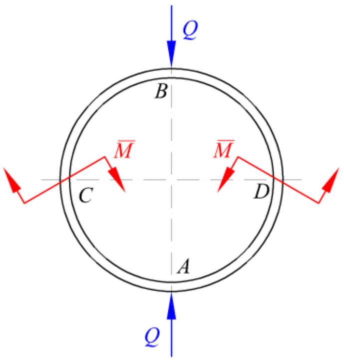



Tenká obruč je zatížená dvěma momenty $\bar{M}$ . Pomocí Bettiho věty určete změnu průměru AB po zatížení.

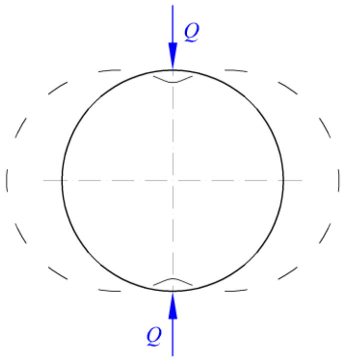
Bettiho věta – viz C. Hősehl, Pružnost a pevnost II, Liberec 1992, str. 45:
Práce zobecněných sil první skupina na zobecněných posuvech vzniklých působením zobecněných sil druhé skupiny je stejná, jako práce zobecněných sil druhé skupiny vykonaná na zobecněných posuvech způsobených zobecněnými silami první skupiny.

$$A_{II}^{I} = A_{I}^{II}$$

Na obruč působí I skupina zobecněných sil, které jsou v rovnováze (momenty $\bar{M}$ ) ta způsobí zobecněné posuvy v místech A a B. Připojíme v těchto bodech rovnovážnou soustavu sil II(Q), které vykonají práci na posuvech způsobených momenty

$$A_{I}^{II} = Q \cdot \vartriangle AB$$

Momenty $\bar{M}$ konají práci na natočeních způsobených silami Q v místech C a D

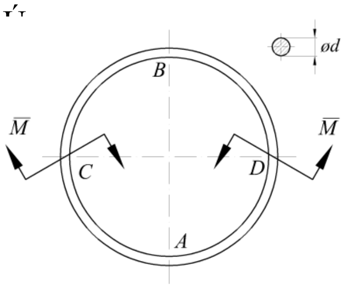



$$A_{II}^{I} = 2\bar{M} \cdot \varphi \qquad A_{II}^{I} = A_{I}^{II}$$

Avšak síly Q nezpůsobí žádné natočení průřezů v místech C a D $\Rightarrow \vartriangle AB = 0$.

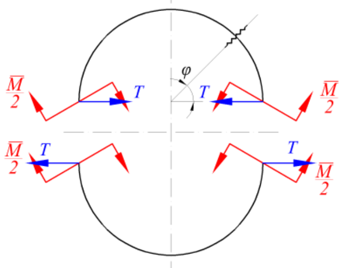
Řešení bez využití Bettiho věty

a) Určení vnitřních sil u obruče zatížené pouze momenty $\bar{M}$ .




Úloha je antisymetrická – osa antisymetrie je C-D. Na ose antisymetrie působí pouze příčná vnitřní síla, ohybový moment a normálná síla jsou nulové.
Myšlený řez povedeme osou antisymetrie a rozdělíme obruč na dvě části. Zatěžující momenty se rozdělí rovným dílem na obě části. V myšleném řezu působí vnitřní příčná síla T, která je staticky neurčitá.

Z Castiglianovi věty: $\dfrac{\partial U}{\partial T} = 0$




$$M(\varphi) = \frac{\bar{M}}{2} - T \cdot r \sin\varphi, \quad \frac{\partial M(\varphi)}{\partial T} = -r\sin\varphi$$

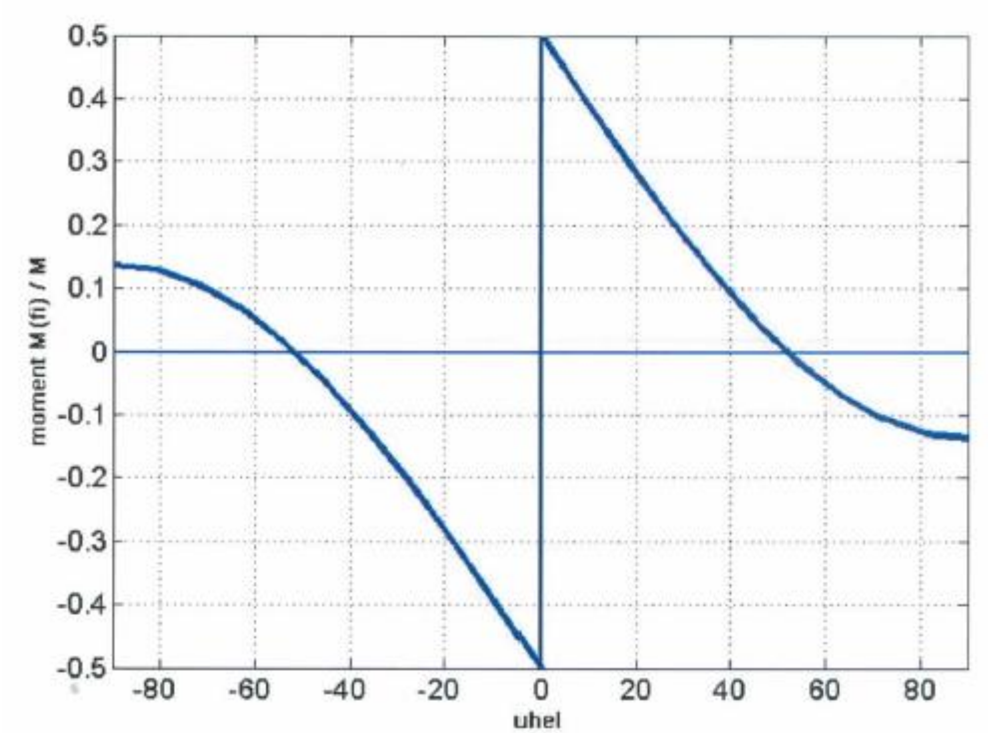
$U = 4U_{\frac{1}{4}}$ (vnitřní moment je stejný v každé $\frac{1}{4}$ obruče až na znaménko, ale deformační energie je funkcí kvadrátu momentu)

$$\frac{\partial U}{\partial T} = 0 \Rightarrow \frac{4}{EJ}\int_0^{\pi/2} M(\varphi)\cdot\frac{\partial M(\varphi)}{\partial T} r d\varphi = \frac{4}{EJ}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\bar{M}}{2} - Tr\sin\varphi\right)(-r\sin\varphi) r d\varphi = 0$$

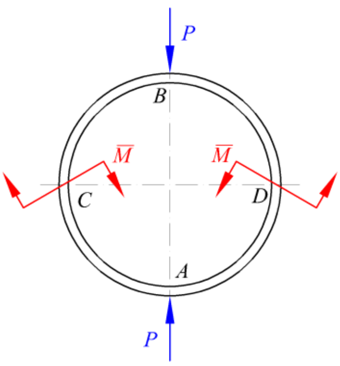
$$\Rightarrow -\frac{\bar{M}}{2} + \frac{\pi}{4}Tr = 0 \qquad T = \frac{2}{\pi}\frac{\bar{M}}{r} = 0{,}637\frac{\bar{M}}{r}$$

$$M\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0{,}1366\bar{M}$$

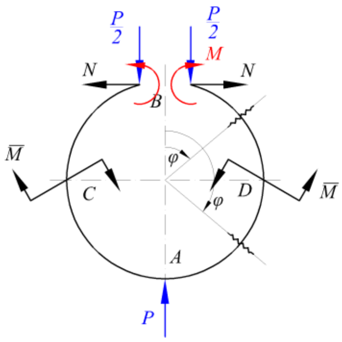
Průběh momentu je na následujícím obrázku.




b) Pokud chceme vypočítat změnu průměru AB bez Bettiho věty, musíme připojit do bodů A a B síly P (které později položíme rovny 0) a derivovat podle nich deformační energii $\Delta AB = \left.\frac{\partial U}{\partial P}\right|_{P=0}$.




Připojením sil P ztratila úloha antisymetrii (která by odebrala 2 stupně statické neurčitosti). Zůstala pouze symetrie podle osy A-B. Úloha je nyní 2x staticky neurčitá.




V myšleném řezu A na ose symetrie působí staticky neurčité vnitřní síly = moment M a normálná síla

$$N \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial N} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial M} = 0 \quad a \quad \triangle_{AB} = \left.\frac{\partial U}{\partial P}\right|_{P=0} .$$

Vnitřní ohybové momenty v řezu I a II a jejich derivace

$$M_I(\varphi) = M - \frac{P}{2} r \sin\varphi - Nr(1-\cos\varphi) \qquad \frac{\partial M_I}{\partial P} = \frac{\partial M_{II}}{\partial P} = -\frac{r}{2}\sin\varphi$$

$$M_{II}(\varphi) = M - \frac{P}{2} r \sin\varphi - Nr(1-\cos\varphi) - \bar{M} \qquad \frac{\partial M_I}{\partial M} = \frac{\partial M_{II}}{\partial M} = 1$$

$$U = 2U_{\frac{1}{2}} \qquad \frac{\partial M_I}{\partial N} = \frac{\partial M_{II}}{\partial N} = -r(1-\cos\varphi)$$

V okamžiku, kdy vypočteme $\frac{\partial M_I}{\partial P}$ a $\frac{\partial M_{II}}{\partial P}$, můžeme položit ve vztazích P=0.

Řešíme soustavu 3 rovnic

$$\frac{\partial U}{\partial M} = 0 \qquad \frac{2}{EJ}\left\{ \int_0^{\pi} \left[M - Nr(1-\cos\varphi)\right]\cdot(1)\, r d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\bar{M}\cdot(1)\, r d\varphi \right\} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial N} = 0 \qquad \frac{2}{EJ}\left\{ \int_0^{\pi} \left[M - Nr(1-\cos\varphi)\right]\left[-r(1-\cos\varphi)\, r d\varphi\right] + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -M\cdot\left[-r(1-\cos\varphi)\right] r d\varphi \right\} = 0$$

$$\triangle AB = \left.\frac{\partial U}{\partial P}\right|_{P=0} \qquad \frac{2}{EJ}\left\{ \int_0^{\pi} \left[M - Nr(1-\cos\varphi)\right]\left(-\frac{1}{2} r \sin\varphi\right) r d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -M\left(-\frac{1}{2} r\sin\varphi\right) r d\varphi \right\} = \triangle AB$$

Z prvních dvou rovnic vyjde

$$M = -0{,}1366\bar{M}$$

$$N = -0{,}6366\frac{\bar{M}}{r}$$

(viz řešení a) )

a po dosazení do třetí rovnice vyjde $\triangle AB = 0$.