Kmitání mechanických soustav
I. část - úvod

Iva Petríková

Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti

Obsah

- Úvod, základní pojmy
- Počet stupňů volnosti
- Příklady kmitavého pohybu
- Periodický pohyb
- Harmonický pohyb, vlastnosti
- Soustava s 1 stupněm volnosti
- Volné kmitání netlumené
- Volné kmitání tlumené
- Logaritmický dekrement

Úvod, základní pojmy

- nejvýznamnější část dynamiky - kmitání se zabývá chováním těles za působení oscilačních sil
- všechna hmotná a pružná tělesa jsou způsobilá k vibracím
- průvodní jev při provozu mnoha technických zařízení - příčina poruchy částí strojů, nadměrného opotřebení, nesprávného chodu přístrojů, nadměrného hluku atd
- dochází ke změně fyzikálních veličin v čase (výchylek, rychlostí, zrychlení, sil, napětí)
- postup řešení: výpočtový model (fyzikální), matematický model, identifikace parametrů

Základní pojmy

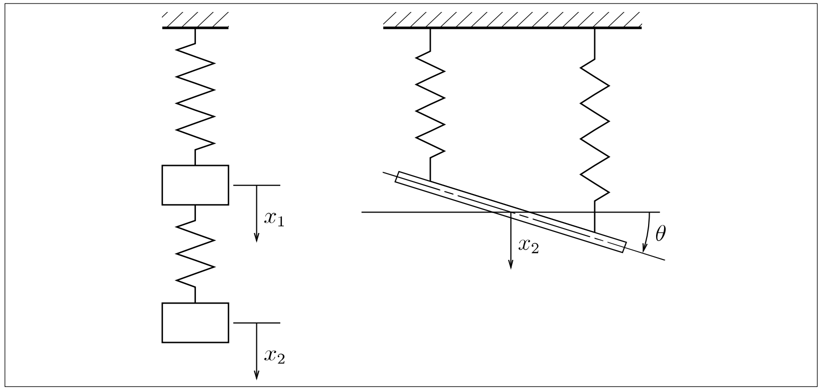
- Kmitavý pohyb je periodický – opakující se v určitém čase
- Typy kmitavého pohybu: volné kmitání x vynucené kmitání
- Volné kmitání – kmitání je způsobeno vlastní energií systému, vnější silové účinky na systém nepůsobí
- Vynucené kmitání – způsobené působením vnějších sil
- Kmitající systémy vykazují tzv. tlumení způsobené disipací energie vlivem tření nebo jiných odporů

Typy prvků modelu, počet stupňů volnosti

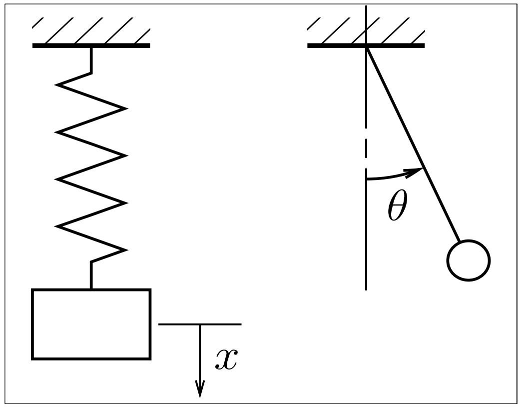
Typy prvků

- Diskrétní elementy – lineární a torzní pružiny
- Prvky se spojitě rozloženou hmotou – struny, nosníky a desky

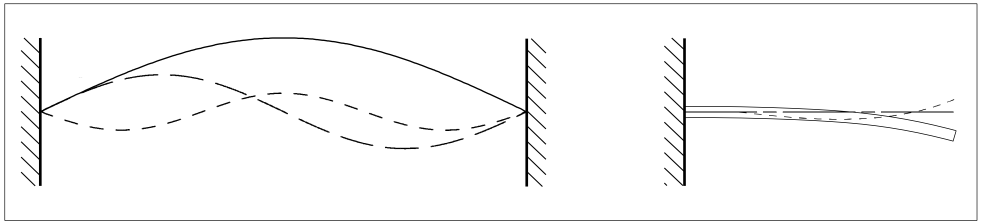
Počet stupňů volnosti = počet nezávislých souřadnic



Soustava se dvěma stupni volnosti



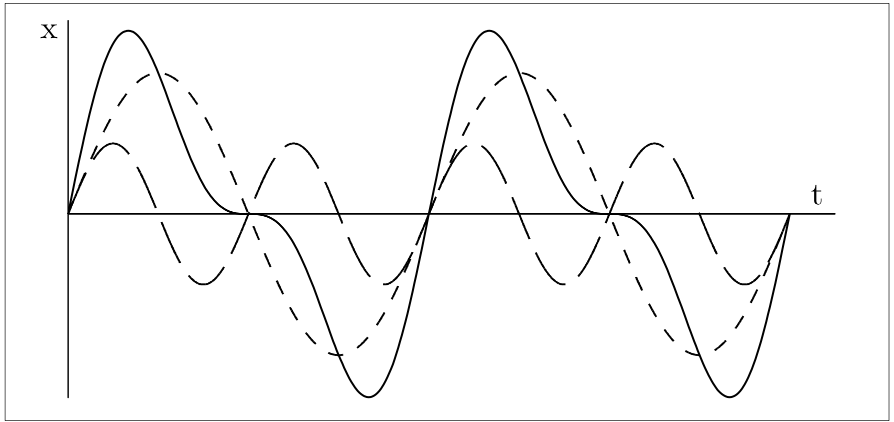
Soustava s jedním stupněm volnosti



Soustava s nekonečným počtem stupňů volnosti

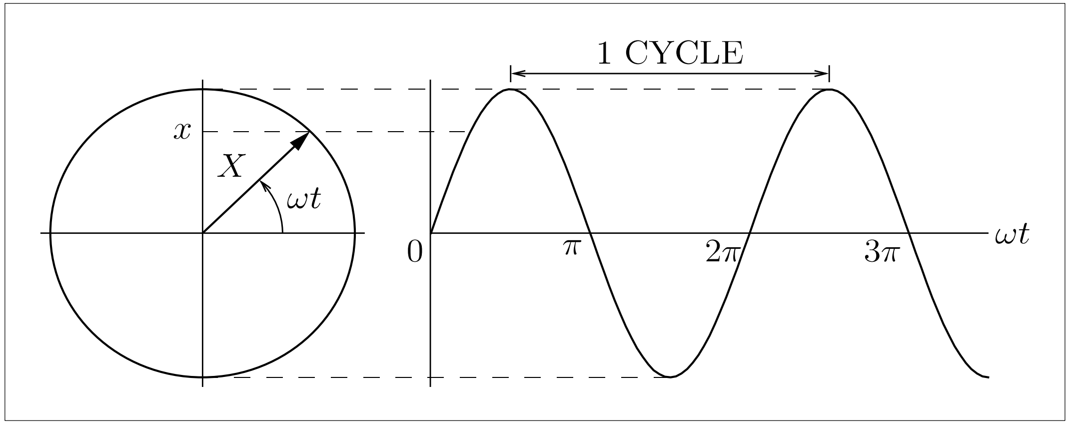
Periodický kmitavý pohyb

- Periodický pohyb a jeho harmonické složky



Periodický pohyb se opakuje po určitém intervalu času

- Harmonický pohyb



Nejjednodušší forma periodického pohybu je harmonický pohyb – sin, cos

Vlastnosti harmonického pohybu

- Harmonický pohyb je dán funkcí:

$$x = X \sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

- x, x(t) ... výchylka [m]
- X ... amplituda výchylky [m]
- $\left(\omega t + \varphi\right)$ ... fáze
- ω ... úhlová rychlost [s^{-1}]
- T ... perioda pohybu [s]
- f ... frekvence = počet cyklů za jednotku času, rozměr [s^{-1}], jednotka [Hz] Hertz
- φ ... fázový úhel

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \omega = 2\pi f$$

- Rychlost: $$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \omega X \cos(\omega t + \varphi)$$

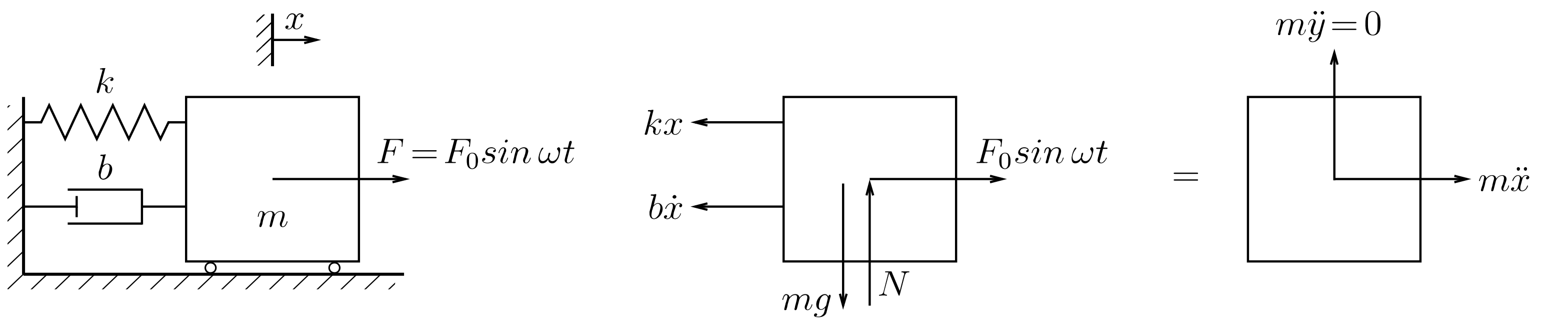
- ωX ... amplituda rychlosti [ms^{-1}]

- Zrychlení: $$\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 X \sin(\omega t + \varphi)$$

- $-\omega^2 X$ ... amplituda zrychlení [ms^{-2}]

Soustava s jedním stupněm volnosti

hmota, pružina, tlumič, harmonická budící síla



Budící síla – harmonické buzení

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$$

Volné kmitání tlumené

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

Volné kmitání netlumené

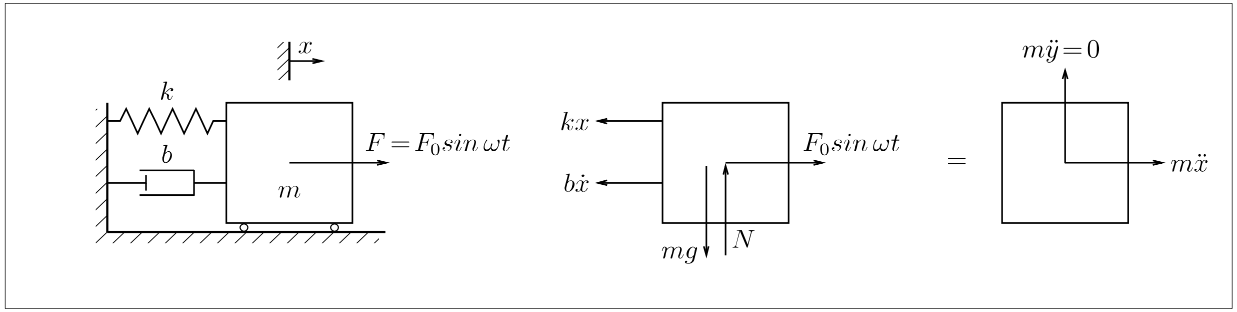
$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Soustava s jedním stupněm volnosti

<u>Základní pojmy:</u> jednohmotový systém, harmonická budící síla

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$$

$$F(t) = F_0 \sin \omega t$$



m ... hmotnost
b ... součinitel (viskózního) tlumení
k ... tuhost
F_0 ... amplituda budící síly
ω ... budící frekvence
b_{kr} ... součinitel kritického tlumení

$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ... vlastní úhlová frekvence

$\eta = \frac{\omega}{\Omega}$ ... součinitel naladění

$b_{KR} = 2\sqrt{km}$ ... součinitel kritického tlumení

$\zeta = \frac{b}{b_{KR}}$ ... poměrný útlum

Netlumené volné kmitání

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

Řešení diferenciální rovnice 2. řádu:
Předpoklad:
pomocí charakteristická rovnice:

$$m\lambda^2 + k = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\Omega$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ vlastní frekvence soustavy s 1 stupněm volnosti

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \ddot{x} + \Omega^2 x = 0$$

$$x(t) = Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t}$$ volné kmitání

Konstanty A a B určíme s počátečních podmínek:

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$$

$$\dot{x}(t) = i\Omega\left(Ae^{i\Omega t} - Be^{-i\Omega t}\right)$$

$$x_0 = A + B$$

$$v_0 = i\Omega(A - B)$$

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{ix_0\Omega + v_0}{i\Omega}\right)$$

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{ix_0\Omega - v_0}{i\Omega}\right)$$

Tlumené volné kmitání

$$\boxed{m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0}$$

Řešení diferenciální rovnice 2. řádu pomocí charakteristická rovnice:

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b}{2m} \pm \sqrt{b^2 - 4mk}\,\frac{1}{2m}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b}{2m} \pm i\sqrt{\frac{4mk}{4m^2} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \frac{-b}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}}\right)^2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b}{2m} \pm i\Omega\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2\sqrt{km}}\right)^2}$$

$$\frac{b}{2\sqrt{km}} = \frac{b}{b_{CR}} = \zeta$$ poměrný útlum

$$b_{CR} = 2\sqrt{km}$$ součinitel kritického tlumení

$$\Omega\sqrt{1-\zeta^2} = \Omega_T$$ vlastní frekvence tlumené soustavy

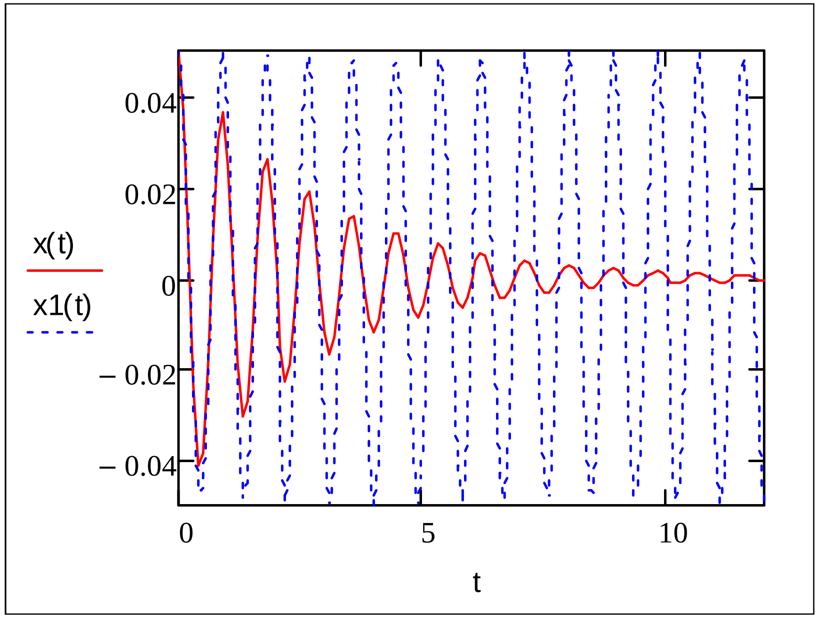
$$\lambda_{1,2} = \left(-\zeta \pm i\sqrt{1-\zeta^2}\right)\Omega$$

$$x(t) = Ae^{\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\Omega t} + Be^{\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\Omega t}$$

$\zeta > 1$ nadkritické tlumení

$\zeta < 1$ podkritické tlumení

$\zeta = 1$ kritické tlumení



Netlumené --- a tlumené kmitání ---

Tlumené volné kmitání

Nadkritické tlumení: $\boxed{\zeta > 1}$ výchylka je dána součtem dvou exponenciál, pohyb je neperiodický, těleso má tendenci vrátit se do rovnovážného stavu – APERIODICKÝ POHYB (Obr.1)

$$x = Ae^{\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\Omega t} + Be^{\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\Omega t}$$

Podkritické tlumení: $\boxed{\zeta < 1}$ výchylka osciluje s klesající amplitudou (Obr.2)

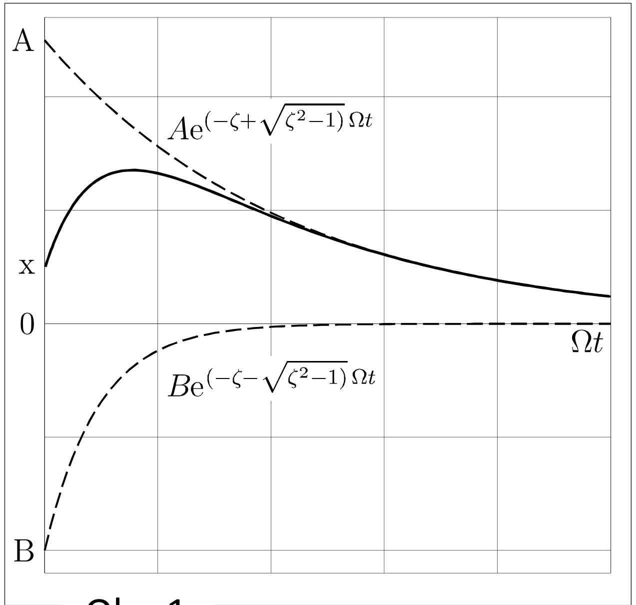
$$x = e^{-\zeta\Omega t}[C_1 e^{i\sqrt{1-\zeta^2}\Omega t} + C_2 e^{-i\sqrt{1-\zeta^2}\Omega t}] =$$

$$= e^{-\zeta\Omega t}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right) =$$

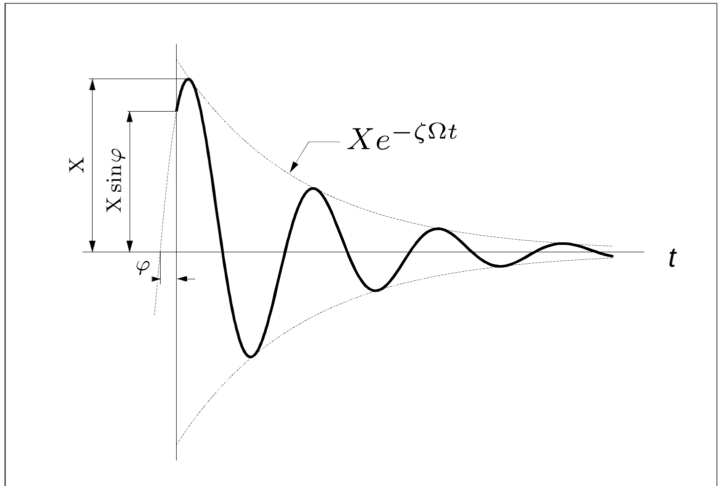
$$= Ce^{-\zeta\Omega t}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\Omega t + \gamma\right)$$

Kritické tlumení: $\boxed{\zeta = 1}$

$$x = [A + Bt]e^{-\Omega t}$$



Obr. 1



Obr. 2

Tlumené volné kmitání – Logaritmický dekrement

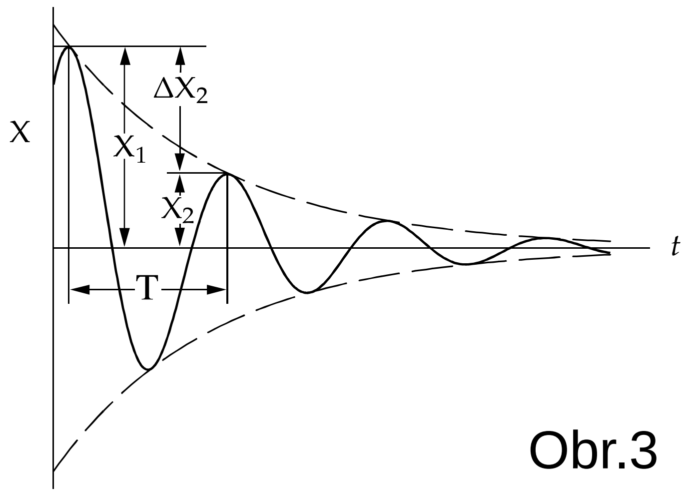
Přirozený logaritmus dvou po sobě jdoucích výchylek (Obr.3)

$$\delta = \ln\frac{x_1}{x_2} = \ln\frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln\frac{e^{-\zeta\Omega t}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right)}{e^{-\zeta\Omega(t+T)}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right)} =$$

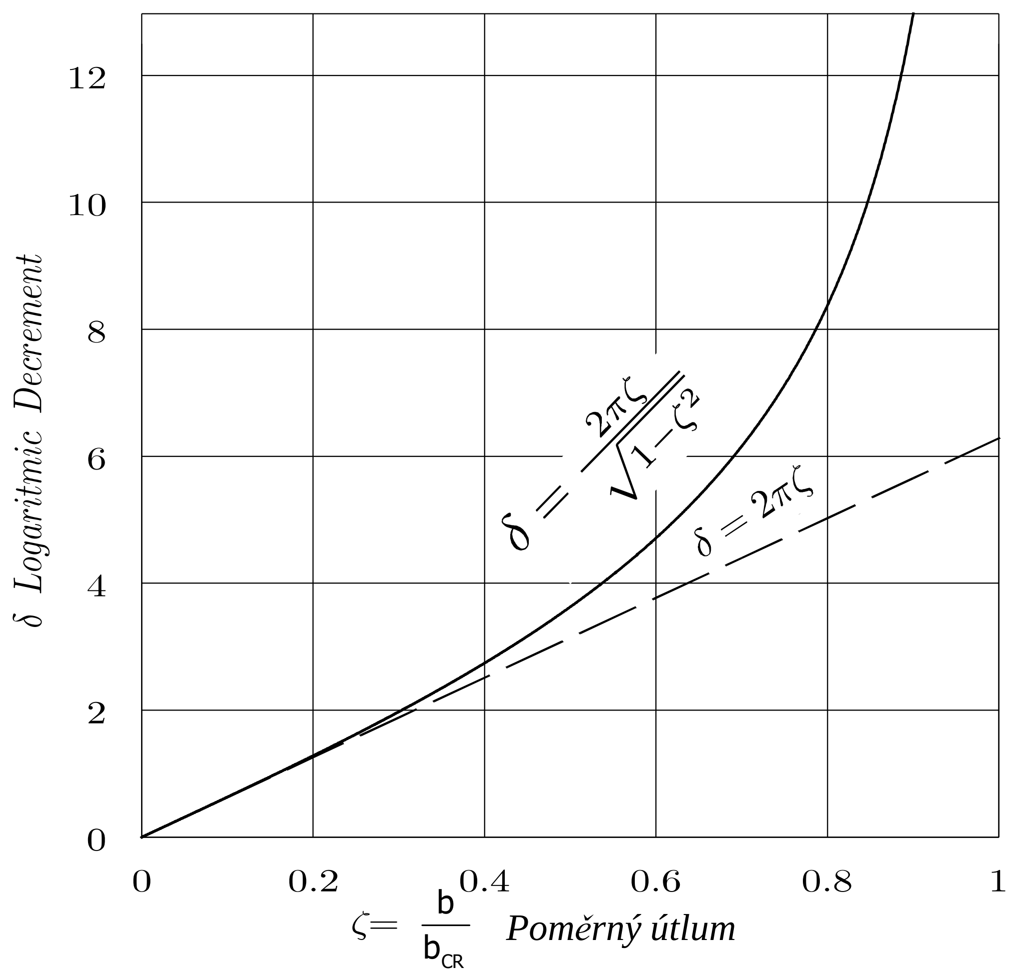
$$= \ln\frac{1}{e^{-\zeta\Omega T}} = \zeta\Omega T = \zeta\Omega\frac{2\pi}{\Omega_T} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$\delta \doteq 2\pi\zeta$ pro $b << b_{CR}$

$$\delta = \ln\frac{x(t)}{x(t+nT)} \doteq 2\pi n\zeta$$



Obr.3



Příklady kmitajících soustav, zajímavé odkazy

Most Tacoma Narrows (1940)	https://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs
Most přes řeku Volhu, Volgograd (2008)	www.amk.cool/videa/nejnovejsi/detail/11718/3
Animace některých jevů v kmitání	http://www.acs.psu.edu/drussell/demos.html