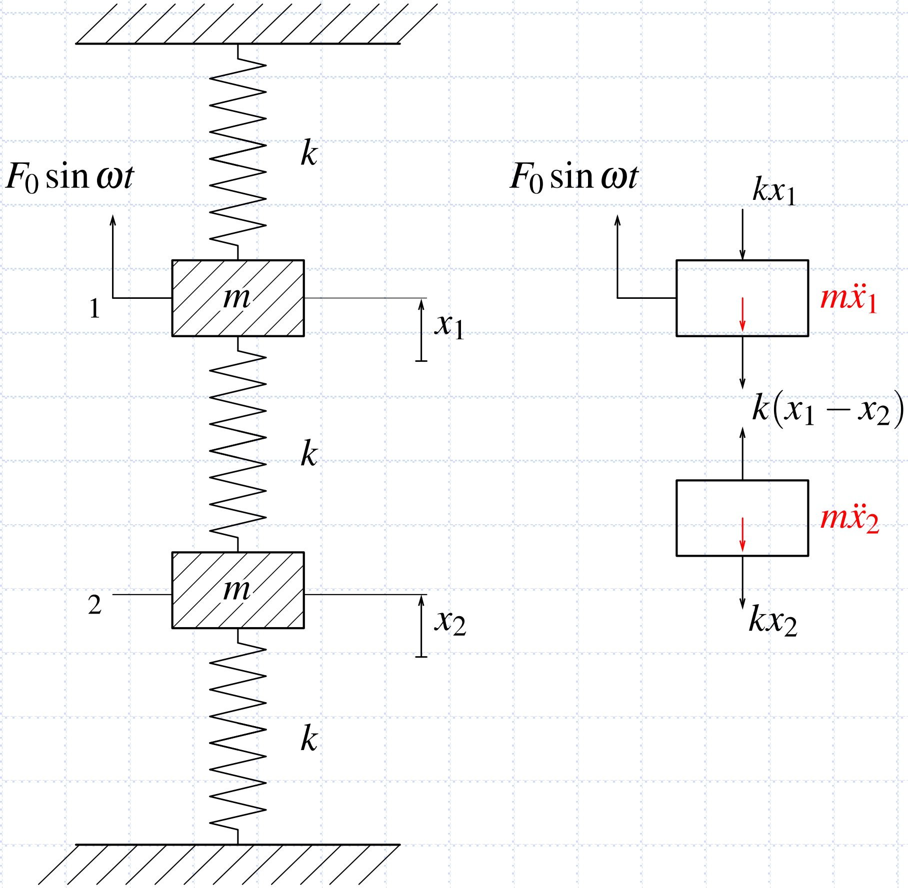
Kmitání soustav se dvěma stupni volnosti

1 Sestavení rovnic
2 Vlastní frekvence
3 Vlastní tvary kmitů
4 Volné kmitání
5 Vynucené kmitání netlumené soustavy
6 Určení konstant z počátečních podmínek

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Soustava se dvěma stupni volnosti

- Předvedení řešení na translační soustavě se dvěma stupni volnosti - (3 pružiny o stejné tuhosti k a 2 hmoty o hmotnosti m)
- Po uvolnění a zavedení sil, sestavíme pohybové rovnice



Sestavení pohybových rovnic, výpočet vlastních frekvencí

- Soustava diferenciálních rovnic 2. řádu

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 + k(x_1 - x_2) = F_0 \sin \omega t$$
$$m\ddot{x}_2 + kx_2 - k(x_1 - x_2) = 0$$

$$m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = F_0 \sin \omega t$$
$$m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0$$

- Vlastní frekvence soustavy
- homogenní soustava (bez buzení, $F_0=0$)

$$m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0$$
$$m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0 \qquad (1)$$

- předpokládané řešení

$$x_1 = a_1 \sin \Omega t$$
$$x_2 = a_2 \sin \Omega t$$

- druhá derivace

$$\ddot{x}_1 = -a_1\Omega^2 \sin \Omega t = -\Omega^2 x_1$$
$$\ddot{x}_2 = -a_2\Omega^2 \sin \Omega t = -\Omega^2 x_2$$

- dosazení do rovnice (1)

$$-m\Omega^2 x_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0$$
$$-m\Omega^2 x_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

vlastní frekvence

vlastní tvary kmitů

Výpočet vlastních frekvencí

Soustava lineárních algebraických rovnic - homogenních

$$\left(2k - m\Omega^2\right)x_1 - kx_2 = 0$$

$$-kx_1 + \left(2k - m\Omega^2\right)x_2 = 0$$

Soustava rovnic má netriviální řešení právě tehdy když determinant soustavy je roven nule

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} 2k - m\Omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\Omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Po úpravě

$$\left(2k - m\Omega^2\right)^2 - k^2 = 0$$

$$4k^2 - 4km\Omega^2 + m^2\Omega^4 - k^2 = 0$$

- Kvadratická rovnice

$$\Omega^4 - 4\frac{k}{m}\Omega^2 + 3\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0$$

- Po označení

$$\frac{k}{m} = \Omega_0^2$$

- Bikvadratická rovnice

$$\Omega^4 - 4\Omega_0^2\Omega^2 + 3\Omega_0^4 = 0$$

- Kořeny rovnice

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{4\Omega_0^2 \pm \sqrt{16\Omega_0^4 - 12\Omega_0^4}}{2}$$

Výpočet vlastních tvarů kmitů

- Vyjdeme z algebraických rovnic

$$\left(2k - m\Omega^2\right) x_1 - kx_2 = 0$$

$$-kx_1 + \left(2k - m\Omega^2\right) x_2 = 0$$

- Z rovnice (2a)

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)_{1,2} = \frac{2k - m\Omega_{1,2}^2}{k} = 2 - \frac{\Omega_{1,2}^2}{\Omega_0^2}$$

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)_1 = 2 - 1 = 1$$

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)_2 = 2 - 3 = -1$$

- Hmoty kmitají ve fázi

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)_1 = 1$$

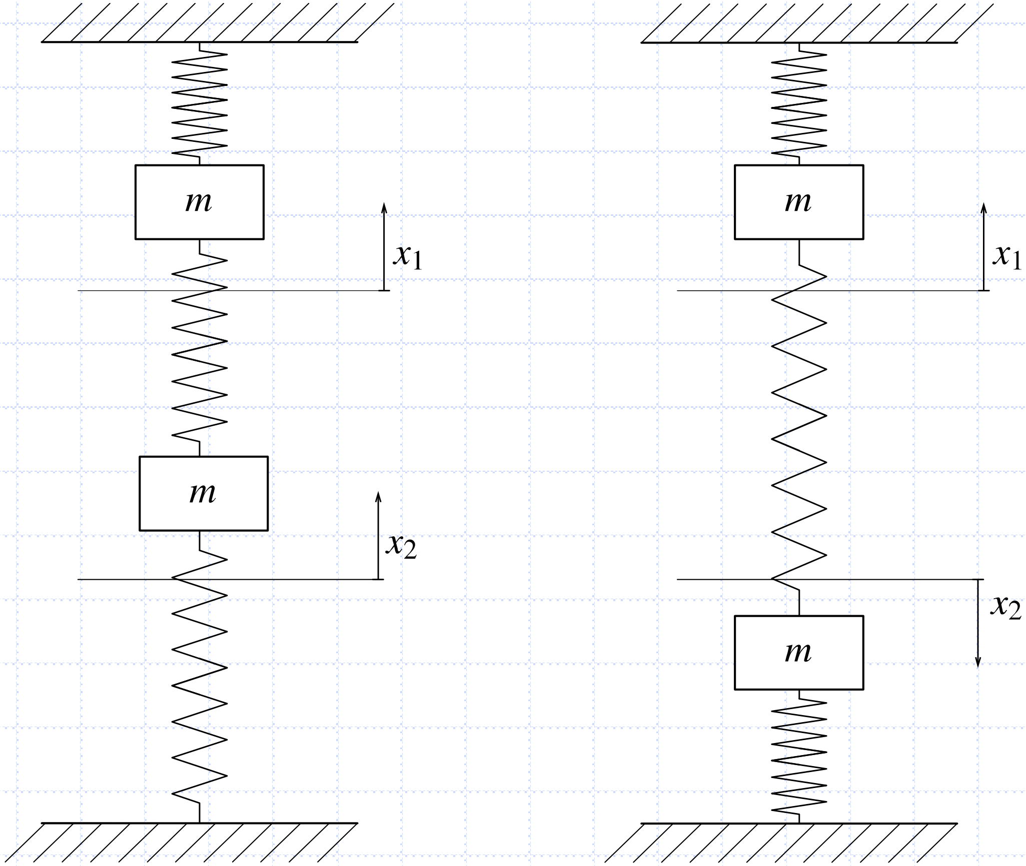
- Hmoty kmitají v protifázi

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)_2 = -1$$

- Determinant soustavy

$$D = \Omega^4 - 4\Omega_0^2\Omega^2 + 3\Omega_0^4 = 0$$

Vlastní tvary kmitů



Volné kmitání dvouhmotové soustavy

- Vyjdeme z algebraických rovnic, je dáno superpozicí vlastních tvarů kmitů

$$x_1(t) = A_1 \cos \Omega_1 t + B_1 \sin \Omega_1 t + A_2 \cos \Omega_2 t + B_2 \sin \Omega_2 t$$

$$x_2(t) = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)_1 \left(A_1 \cos \Omega_1 t + B_1 \sin \Omega_1 t\right) + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)_2 \left(A_2 \cos \Omega_2 t + B_2 \sin \Omega_2 t\right)$$

- Konstanty A_1, B_1, A_2, B_2 vypočteme z počátečních podmínek

$$\left.\begin{aligned} x_1(0) &= x_{10} \\ \dot{x}_1(0) &= \dot{x}_{10} = v_{10} \\ x_2(0) &= x_{20} \\ \dot{x}_2(0) &= \dot{x}_{20} = v_{20} \end{aligned}\right\} \text{alespoň jedna podmínka nenulová}$$

Amplitudy ustálených vynucených kmitů, ustálená odezva

- Vyjdeme z diferenciálních rovnic

$$m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = F_0 \sin \omega t$$
$$m\ddot{x}_2 - kx_1 + 2kx_2 = 0$$

- Předpokládané řešení

$$x_1 = a_1 \sin \omega t$$
$$x_2 = a_2 \sin \omega t$$

- Druhá derivace

$$\ddot{x}_1 = -a_1\omega^2 \sin \omega t$$
$$\ddot{x}_2 = -a_2\omega^2 \sin \omega t$$

- Po dosazení dostáváme soustavu algebraických rovnic

$$-ma_1\omega^2 \sin \omega t + 2ka_1 \sin \omega t - ka_2 \sin \omega t = F_0 \sin \omega t$$
$$-ka_1 \sin \omega t - ma_2\omega^2 \sin \omega t + 2ka_2 \sin \omega t = 0$$

- V rovnicích zkrátíme výraz sin ωt

$$-ma_1\omega^2 + 2ka_1 - ka_2 = F_0$$
$$-ka_1 - ma_2\omega^2 + 2ka_2 = 0$$

- Po úpravě

$$\left(2k - m\omega^2\right)a_1 - ka_2 = F_0$$
$$-ka_1 + \left(2k - m\omega^2\right)a_2 = 0$$

Amplitudy ustálených vynucených kmitů, ustálená odezva

- Soustava lineárních algebraických rovnic – řešení pomocí Cramerova pravidla

$$a_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} F_0 & -k \\ 0 & 2k - m\Omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2k - m\Omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\Omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{F_0 \left(2k - m\Omega^2\right)}{\left(2k - m\Omega^2\right)^2 - k^2}$$

- Vyjádření v bezrozměrném tvaru

$$a_1 = a_{ST} \frac{2 - \eta^2}{\left(2 - \eta^2\right)^2 - 1}$$

- kde

$$a_{ST} = \frac{F_0}{k}, \eta^2 = \frac{\omega^2}{k/m}$$

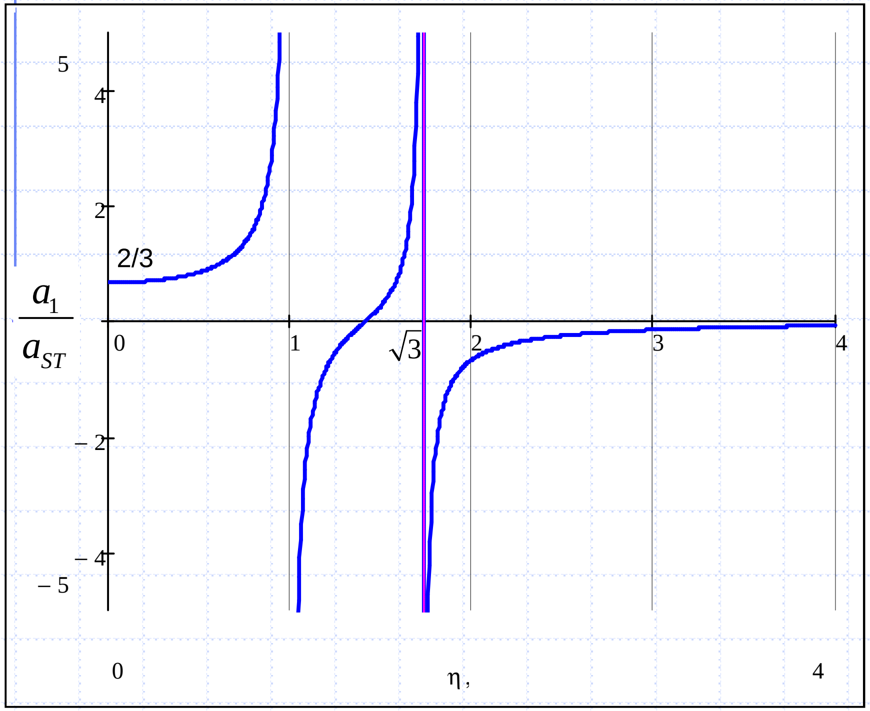
Amplitudy ustálených vynucených kmitů, ustálená odezva

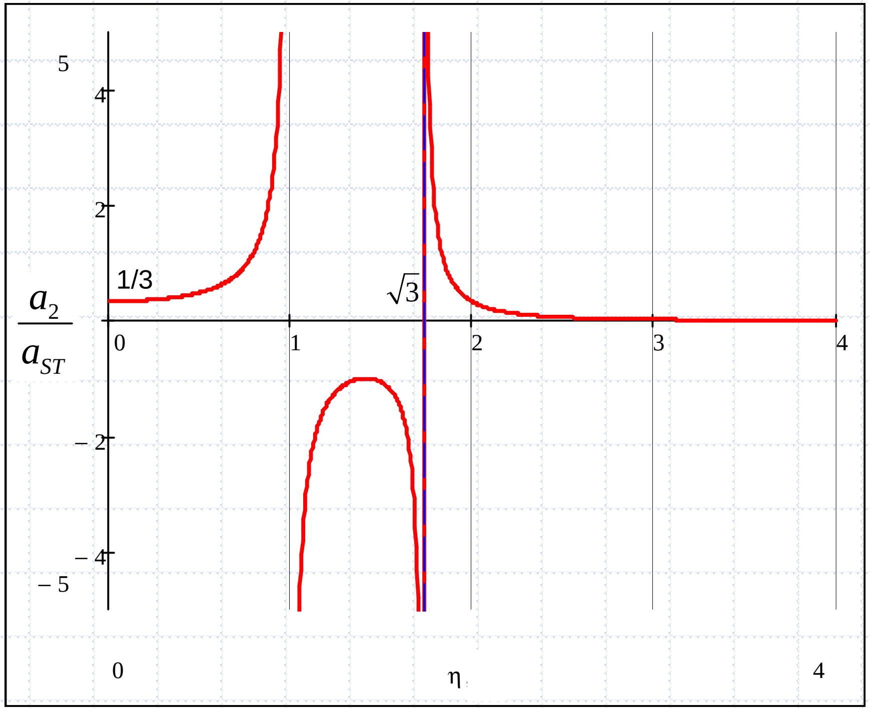
$$a_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2k - m\Omega^2 & F_0 \\ -k & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2k - m\Omega^2 & -k \\ -k & 2k - m\Omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{kF_0}{\left(2k - m\,\Omega^2\right)^2 - k^2}$$

$$a_2 = a_{ST}\,\frac{1}{\left(2 - \eta^2\right)^2 - 1}$$

Soustava se dvěma stupni volnosti
Amplitudové charakteristiky

- Amplitudová charakteristika hmoty 1
- Amplitudová charakteristika hmoty 2





Výpočet konstant A_1, B_1, A_2, B_2

- Pro rovnice pro volné kmitání nalezneme konstanty A_1, B_1, A_2, B_2 z počátečních podmínek

$$x_1(0) = x_{10}$$
$$\dot{x}_1(0) = 0$$
$$x_2(0) = 0$$
$$\dot{x}_2(0) = 0$$

- Počáteční podmínky dosadíme do rovnic

$$x_1(t) = A_1 \cos\Omega_1 t + B_1 \sin\Omega_1 t + A_2 \cos\Omega_2 t + B_2 \sin\Omega_2 t$$

$$x_2(t) = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)_1 (A_1 \cos\Omega_1 t + B_1 \sin\Omega_1 t) + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)_2 (A_2 \cos\Omega_2 t + B_2 \sin\Omega_2 t)$$

$$\dot{x}_1(t) = \Omega_1 (-A_1 \sin\Omega_1 t + B_1 \cos\Omega_1 t) + \Omega_2 (-A_2 \sin\Omega_2 t + B_2 \cos\Omega_2 t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)_1 \Omega_1 (-A_1 \sin\Omega_1 t + B_1 \cos\Omega_1 t) + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)_2 \Omega_2 (-A_2 \sin\Omega_2 t + B_2 \cos\Omega_2 t)$$

Výpočet konstant A_1, B_1, A_2, B_2

- Po dosazení do rovnic

$$x_{10} = A_1 + A_2$$

$$0 = A_1 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)_1 + A_2 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)_2$$

$$0 = \Omega_1 B_1 + \Omega_2 B_2$$

$$0 = \left(\frac{x_2}{x_1} \right)_1 \Omega_1 B_1 + \left(\frac{x_2}{x_1} \right)_2 \Omega_2 B_2$$

- Vypočtené p. p.

$$B_1 = B_2 = 0$$

$$A_1 = \frac{x_{10}}{2}$$

$$A_2 = -\frac{x_{10}}{2}$$

- Rovnice volného kmitání

$$x_1(t) = \frac{x_{10}}{2} \cos \Omega_1 t - \frac{x_{10}}{2} \cos \Omega_2 t$$

$$x_2(t) = \frac{x_{10}}{2} \cos \Omega_1 t + \frac{x_{10}}{2} \cos \Omega_2 t$$

Průběh závislostí $x_1(t)$, $x_2(t)$