Kmitání jednorozměrných lineárních kontinuí

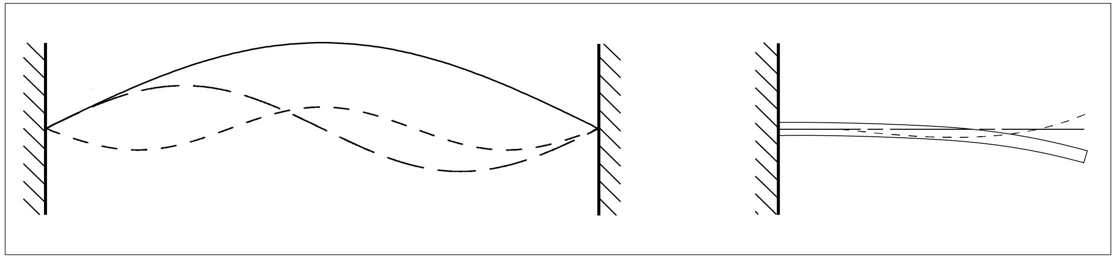
Iva Petríková

Katedra mechaniky, pružnosti a pevnosti

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

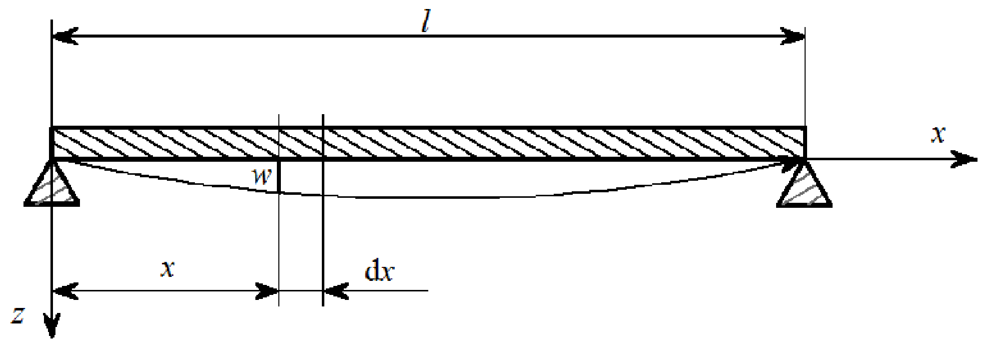
Kmitání jednorozměrných lineárních kontinuí

- Kontinuum = homogenní fyzikální model poddajného tělesa se spojitě rozloženou hmotou
- Jednorozměrné kontinuum – struna, prut, nosník, hřídel (délkový rozměr převažuje nad příčným)
- Lineární model – aplikujeme při malých deformacích
- Homogenní a izotropní materiály - charakterizovány hustotou ρ a dvěma materiálovými konstantami G a E příp. konstantami viskózního tlumení (můžeme zanedbat)



Kmitání nosníku

$$w = w(x,t)$$

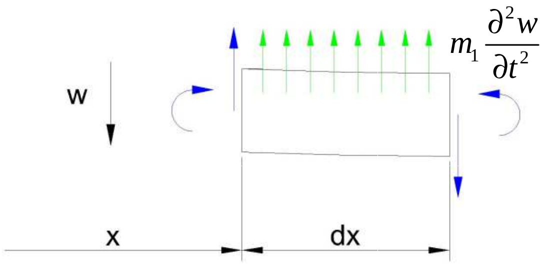


- Diferenciální rovnice průhybové čáry

$$\boxed{w^{IV}(x) = \frac{q(x)}{EJ}}$$

- Dif. rce pro průhyb w závislý na čase t

$$\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = \frac{q(x)}{EJ}$$



$$\Rightarrow q(x,t) = -m_1 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \frac{m_1}{EJ} \cdot \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0}$$

Fourierova metoda řešení

- Řešení v separovaném stavu $w(x,t) = w_1(x) \cdot w_2(t)$

$$w(x,t) = w_1(x) \cdot (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)$$

$$\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} = \frac{\mathrm{d}^4 w_1(x)}{\mathrm{d}x^4} w_2(t)$$

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = -\,\Omega^2 w_1(x) w_2(t)$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}^4 w_1(x)}{\mathrm{d}x^4} - \Omega^2 \frac{m_1}{EJ} w_1(x)\right] w_2(t) = 0$$

výraz označíme $\Omega^2 \frac{m_1}{EJ} = a^4$

Fourierova metoda řešení

$$\left[\frac{\mathrm{d}^4 w_1(x)}{\mathrm{d}x^4} - \Omega^2 \frac{m_1}{EJ} w_1(x)\right] = 0 \qquad a^4 = \Omega^2 \frac{m_1}{EJ}$$

$$w_1^{IV}(x) - a^4 w_1(x) = 0 \qquad w = w(x,t)$$

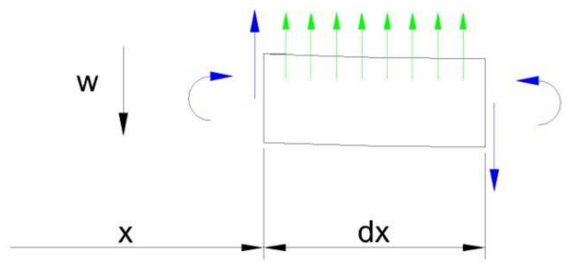
- Diferenciální rovnice 4. řádu
- Řešení: $\lambda^4 - a^4 = 0$

$$\lambda_{1,2,3,4} = a, -a, ja, -ja$$

$w_1(x)$ je dán lineární kombinací všech řešení

$$w_1(x) = \overline{c}_1 e^{ax} + \overline{c}_2 e^{-ax} + \overline{c}_3 e^{jax} + \overline{c}_4 e^{-jax}$$

$$w_1(x) = c_1 \cosh ax + c_2 \sinh ax + c_3 \cos ax + c_4 \sin a$$



Okrajové podmínky

$$w_1(0)=0 \qquad c_1+c_3=0$$

$$w_1''(0)=0 \qquad a^2(c_1-c_3)=0$$

$$\left.\begin{aligned} c_1+c_3&=0\\ a^2(c_1-c_3)&=0\end{aligned}\right\} c_1=c_3=0 \quad (a\neq 0)$$

$$w_1(l)=0 \qquad c_2\sinh al+c_4\sin al=0$$

$$w_1''(l)=0 \qquad a^2(c_2\sinh al-c_4\sin al)=0$$

- Výpočet vlastních frekvencí:

$$D=\begin{vmatrix}\sinh al & \sin al\\ \sinh al & \sin al\end{vmatrix}=0 \quad 1)$$

$$D=-2\sinh al\sin al=0$$

$$\sin al=0$$

$$al=0,\pi,2\pi,3\pi,\ldots,k\pi$$

$$a_k=\frac{k\pi}{l}$$

1) Soustava rovnic má netriviální řešení ↔ determinant soustavy je roven 0

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vlastní frekvence

$$\Omega_k = a_k^2 \sqrt{\frac{EJ}{m_1}} = (k\pi)^2 \sqrt{\frac{EJ}{m_1 l^4}}$$

$$\Omega_1 = \pi^2 \sqrt{\frac{EJ}{m_1 l^4}}$$ první vlastní frekvence

Poznámka: průhyb w_1

sklon w_1'

ohybový moment $w_1'' \approx M$

posouvající síla $w_1''' \approx T$

$$\boxed{w''(x) = -\frac{M(x)}{EJ}}$$

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ