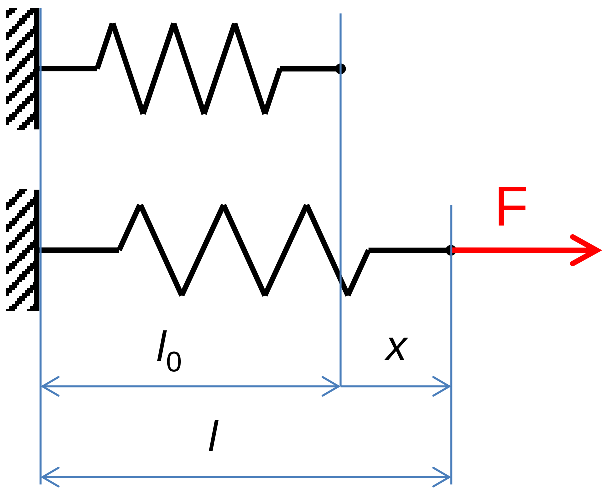
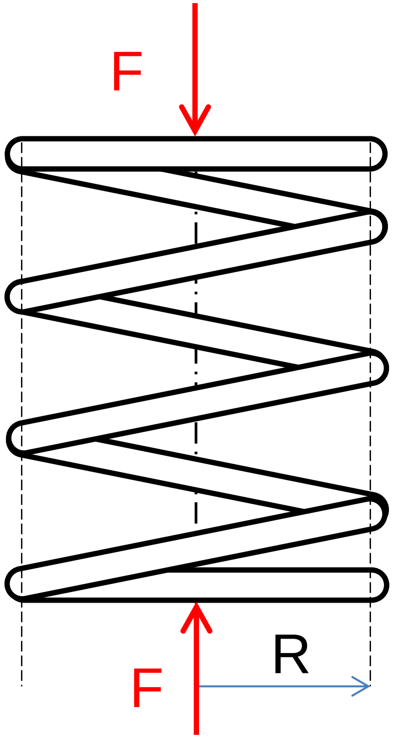
KMS – cvičení 1

Ondřej Marek

TUHOST PRUŽINY (těsně vinuté)

- Charakteristická vlastnost – tuhost
- Značení – ***k***
- Jednotka – **N.m^{-1}** (lineární), **Nm.rad^{-1}** (torzní)
- *F* = *k*·*x*
- Počet závitů n_z
- Průměr drátu *d*, aktivní délka drátu l_d





Práce síly F:

$$W = \int_{l_0}^{l} F(x)dx = \int_{0}^{x} kxdx = \frac{1}{2}kx^2$$

Deformační energie pro krut:

$$U = \int_{l_d} \frac{M_k^2(\xi)}{2G \cdot J_p} d\xi = \frac{M_k^2 \cdot l_d}{2G \cdot J_p}$$

$$M_k = FR$$

$$U = \frac{F^2R^2 \cdot l_d}{2G \cdot J_p}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

μ … koeficient příčného zúžení ($\varepsilon_y = -\mu\varepsilon_x$)

$$l_d \cong 2\pi R n_z$$

$$J_P = \frac{\pi d^4}{32}$$

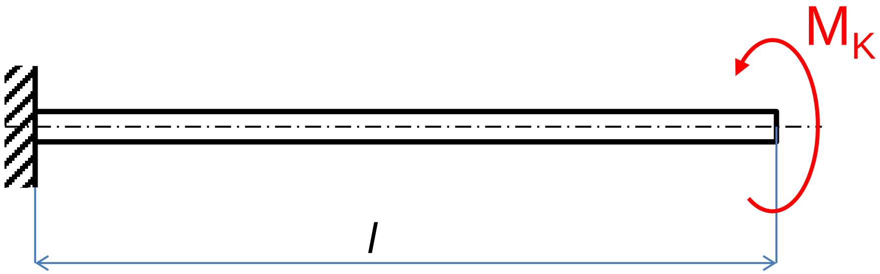
$$U = \frac{32F^2R^3n}{Gd^4} = \frac{32k^2x^2R^3n}{Gd^4}$$

$$U = W$$

$$\frac{32k^2x^2R^3n}{Gd^4} = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\boldsymbol{k = \frac{Gd^4}{64R^3n}}$$

TORZNÍ TUHOST HŘÍDELE



Deformace (zkrut) od momentu M_K:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial U}{\partial M_K} = \frac{\partial}{\partial M_K}\left(\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_K^2(x)}{GJ_P}dx\right) = \frac{1}{GJ_P}\int_0^l M_K(x)dx = \frac{M_K l}{GJ_P}$$

Závislost momentu na zkrutu:

$$M_K = \frac{GJ_P}{l}\Delta\varphi$$

Analogie vzorce $F=k\cdot\Delta x$:

$$M_K = k\Delta\varphi$$

Torzní tuhost [k]=Nm.rad^{-1}

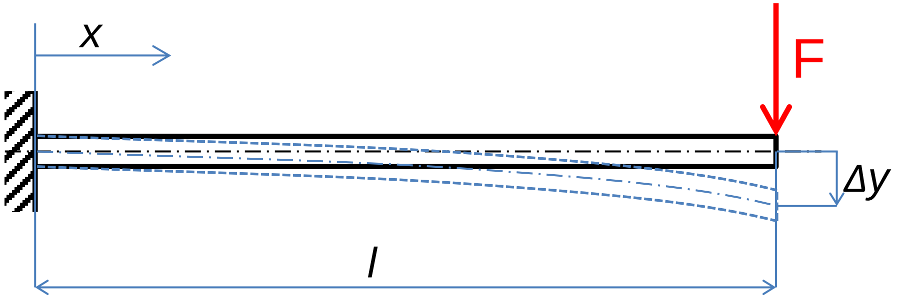
$$k = \frac{GJ_P}{l}$$

Torzní pro kruhový průřez

$$k = G\frac{\pi d^4}{32l}$$

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

OHYBOVÁ TUHOST NOSNÍKU S VOLNÝM KONCEM



Deformační energie pro ohyb:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_o^2(x)}{EJ_z}dx$$

Deformace (průhyb) od síly *F*:

$$\Delta y = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F}\left(\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_o^2(x)}{EJ}dx\right) = \frac{1}{EJ}\int_0^l M_o(x)\frac{\partial M_o}{\partial F}dx$$

$$M_o = F(l-x)$$

$$\frac{\partial M_o}{\partial F} = l - x$$

$$\Delta y = \frac{F}{EJ}\int_0^l (l-x)^2 dx = \frac{Fl^3}{3EJ}$$

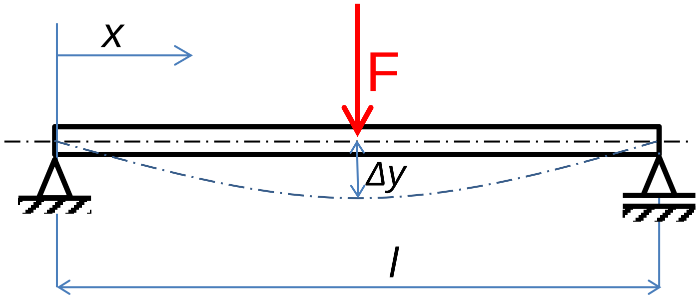
Závislost síly na průhybu:

$$F = \frac{3EJ}{l^3}\Delta y$$

Ohybová tuhost [k]=N.m^{-1}

$$k = \frac{3EJ}{l^3}$$

OHYBOVÁ TUHOST PODEPŘENÉHO NOSNÍKU



Deformace (průhyb) od síly *F*:

$$\Delta y = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F}\left(\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_o^2(x)}{EJ}dx\right) = \frac{2}{EJ}\int_0^{l/2} M_o(x)\frac{\partial M_o}{\partial F}dx$$

$$M_o = \frac{F}{2}x$$

$$\frac{\partial M_o}{\partial F} = \frac{x}{2}$$

$$\Delta y = \frac{2F}{4EJ}\int_0^{l/2} x^2 dx = \frac{Fl^3}{48EJ}$$

Závislost síly na průhybu:

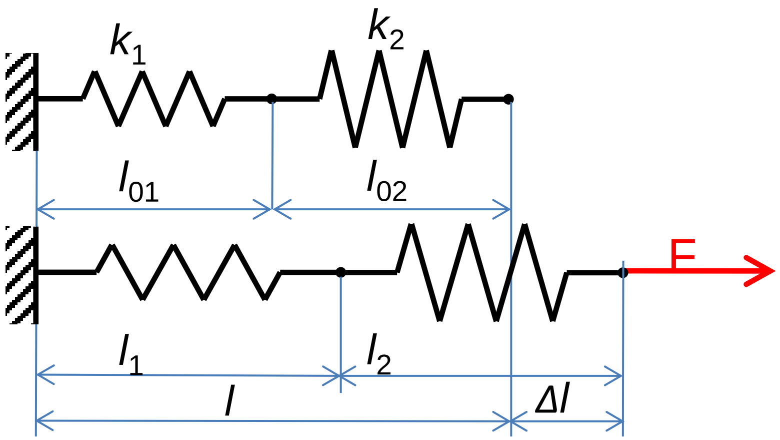
$$F = \frac{48EJ}{l^3}\Delta y$$

Ohybová tuhost [k]=N.m^{-1}

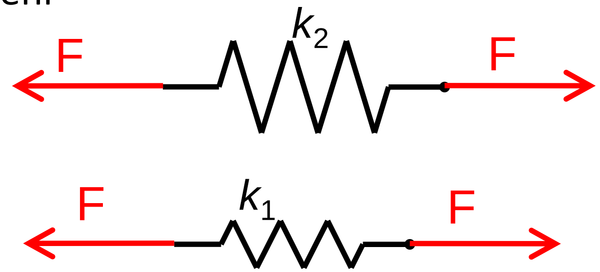
$$k = \frac{48EJ}{l^3}$$

ŘAZENÍ PRUŽIN

Sériové řazení



uvolnění



$$\Delta l_2 = \frac{F}{k_2}$$

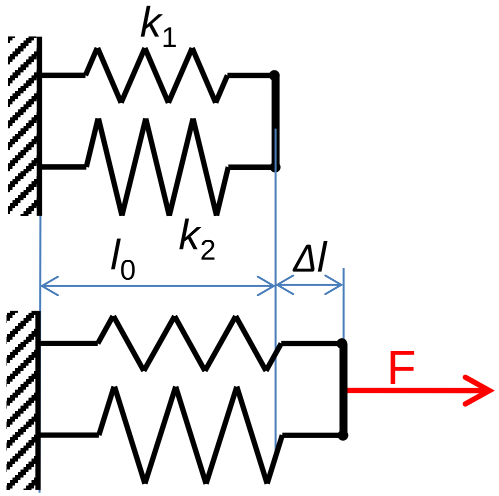
$$\Delta l_1 = \frac{F}{k_1}$$

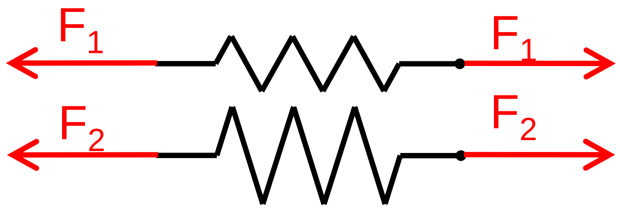
$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)$$

$$\Delta l = \frac{F}{k}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Paralelní řazení





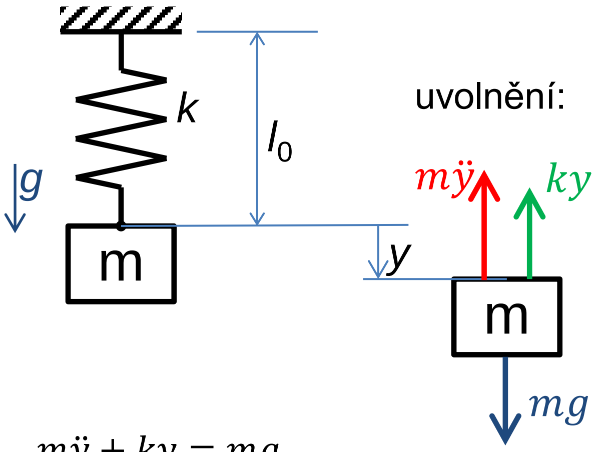
$$\Delta l = \Delta l_1 = \Delta l_2$$

$$F = F_1 + F_2 = k_1 \Delta l_1 + k_2 \Delta l_2 = (k_1 + k_2)\Delta l$$

$$F = k\Delta l$$

$$k = k_1 + k_2$$

VOLNÉ KMITÁNÍ NETLUMENÉ



Dáno:
m = 1kg
k = 100 N/m
g = 10 m/s²
$y(0) = 0$
$\dot{y}(0) = 0$

Určete:
Průběh polohy hmoty m v čase

$$m\ddot{y} + ky = mg$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = g$$

Obecné řešení diferenciální rovnice: $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$

Homogenní řešení pomocí charakteristické rovnice:

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\Omega$$

$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ... vlastní frekvence netlumených kmitů ([Ω]=rad/s)

Fundamentální systém:

$$y_H = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{-i\Omega t}$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$y_H = (C_1 + C_2)\cos\Omega t + i(C_1 - C_2)\sin\Omega t$$

$$y_H = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t = C\sin(\Omega t + \varphi_0)$$

Partikulární řešení:

Odhad: $y_P = C_3$

$\dot{y}_P = 0 \qquad \ddot{y}_P = 0$

Dosazení do diferenciální rovnice:

$$0 + \frac{k}{m}C_3 = g$$

$$C_3 = \frac{mg}{k} = y_{st}$$

Celkové řešení:

$$y = y_H + y_P$$

$$y(t) = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t + \frac{mg}{k}$$

Konstanty A, B z počátečních podmínek:

$y(0) = 0 \qquad \dot{y}(0) = 0$

$$y(0) = 0 = A + 0 + \frac{mg}{k}$$

$$\dot{y}(t) = -A\Omega\sin\Omega t + B\Omega\cos\Omega t$$

$$\dot{y}(0) = 0 = B\Omega$$

$A = -\frac{mg}{k} \qquad B = 0$

$$y(t) = -\frac{mg}{k}\cos\Omega t + \frac{mg}{k}$$

$$y(t) = -0.1\cos 10t + 0.1 = 0.1(1 - \cos 10t)$$