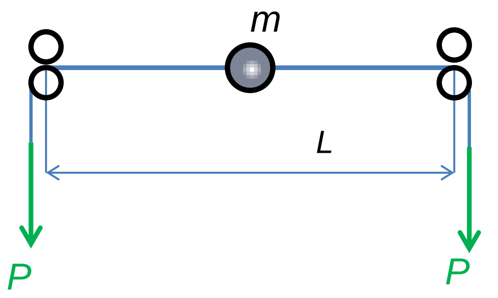
KMS – cvičení 3

Ondřej Marek

evropský sociální fond v ČR EVROPSKÁ UNIE MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI www.tul.cz
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

TLUMENÉ KMITÁNÍ

Příklad: Hmota s hmotností *m* upevněná na předepnuté struně délky *L* se chová jako hmota na pružině. Odpor prostředí je lineárně závislý na rychlosti s konstantou úměrnosti β. Určete vlastní frekvenci netlumeného systému i tlumeného systému. Určete logaritmický dekrement, výchylku v čase 0.05s a výchylku po odeznění 3 period tlumených kmitů.



m = 0,1 kg

L = 2 m

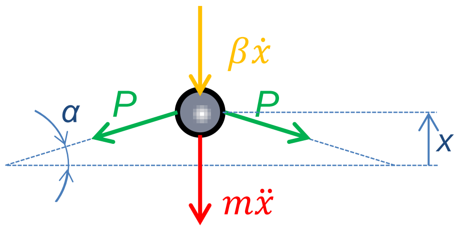
P = 2000N

β = 6 Ns.m^{-1}

Poč. podmínky:

x(0) = 0.01 m

v(0) = 0 m/s



Pohybová rovnice:
$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + 2P\sin\alpha = 0$$

Pro malé α lze psát:
$$\sin\alpha = \alpha = \operatorname{tg}\alpha = \frac{2x}{L}$$
$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + \frac{4P}{L}x = 0$$

Pohybová rovnice:
$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{4P}{mL}x = 0$$

Vlastní frekvence netlumených kmitů
$$\Omega^2 = \frac{4P}{mL}$$
$$\Omega = \sqrt{\frac{4P}{mL}} = 200\,rad\cdot s^{-1}$$

Homogenní řešení:
$$\lambda^2 + \frac{\beta}{m}\lambda + \frac{4P}{mL} = 0$$
$$\frac{4P}{L} = k, \qquad \beta = b$$
$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4mk}{4m^2}}$$

Pokud $b^2 - 4mk < 0 \Rightarrow$ podkritické tlumení $\left(\frac{b^2}{4mk} < 1\right)$
$$\zeta = \sqrt{\frac{b^2}{4mk}} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{m} = 2\zeta\Omega$$

Poměrný útlum ζ:
$$\frac{\beta}{m} = 2\zeta\Omega$$
$$\zeta = \frac{\beta}{2m\Omega} = \frac{\beta}{2m\sqrt{\frac{4P}{mL}}} = \frac{\beta}{4\sqrt{\frac{mP}{L}}} = 0.15$$

Vlastní frekvence tlumených kmitů
$$\Omega_T = \Omega\sqrt{1-\zeta^2} = 197.7\,rad\cdot s^{-1}$$

TLUMENÉ KMITÁNÍ - příklad

Pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{4P}{mL}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\zeta\Omega\dot{x} + \Omega^2 x = 0$$

Homogenní řešení:

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\Omega \pm \sqrt{(\zeta\Omega)^2 - \Omega^2} = -\zeta\Omega \pm i\Omega\sqrt{1-\zeta^2} = -\zeta\Omega \pm i\Omega_T$$

$$x_H = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{(-\zeta\Omega + i\Omega_T)t} + C_2 e^{(-\zeta\Omega - i\Omega_T)t}$$
$$= C_1 e^{-\zeta\Omega t} \cdot e^{i\Omega_T t} + C_2 e^{-\zeta\Omega t} \cdot e^{-i\Omega_T t} = e^{-\zeta\Omega t}\left(C_1 e^{i\Omega_T t} + C_2 e^{-i\Omega_T t}\right)$$

$$x_H = e^{-\zeta\Omega t}(A\cos\Omega_T t + B\sin\Omega_T t)$$

$$\dot{x}_H = -\zeta\Omega e^{-\zeta\Omega t}(A\cos\Omega_T t + B\sin\Omega_T t) + e^{-\zeta\Omega t}(-A\Omega_T\sin\Omega_T t + B\Omega_T\cos\Omega_T t)$$

Dosazení počátečních podmínek a výpočet konstant A a B:

$$x_H(0) = A = 0.01$$

$$\dot{x}_H(0) = -\zeta\Omega A + B\Omega_T = 0$$

$$B = \frac{\zeta\Omega A}{\Omega_T} = \frac{\zeta A}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{0.15 \cdot 0{,}01}{\sqrt{1-0.15^2}} = 0.0015$$

$$x_H(t) = e^{-30t}(0.01\cos(197.7 \cdot t) + 0.0015\sin(197.7 \cdot t))$$

Dosazením za t=0.05 lze vypočíst výchylku v čase 0.05s:

$$x_H(0.05) = -0.0021m$$

definujme periodu tlumených kmitů $T_T = \frac{2\pi}{\Omega_T}$

Logaritmický dekrement:

$$x_H(t_1) = e^{-\zeta\Omega t_1}(A\cos\Omega_T t_1 + B\sin\Omega_T t_1)$$

$$x_H(t_1 + T_T) = e^{-\zeta\Omega(t_1+T_T)}(A\cos(\Omega_T(t_1+T_T)) + B\sin(\Omega_T(t_1+T_T)))$$

$$\frac{x_H(t_1)}{x_H(t_1+T_T)} = \frac{e^{-\zeta\Omega t_1}}{e^{-\zeta\Omega(t_1+T_T)}} = e^{\zeta\Omega T_T}$$

$$\ln\frac{x_H(t_1)}{x_H(t_1+T_T)} = \zeta\Omega T_T = \delta_{LN}$$

Logaritmus podílu po sobě jdoucích výchylek vzdálených v čase o periodu tlumeného systému je konstantní (logaritmický dekrement: δ_{LN})

$$\delta_{LN} = \zeta\Omega T_T = \frac{\zeta\Omega 2\pi}{\Omega_T} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi \cdot 0.15}{\sqrt{1-0.15^2}} = 0.9533$$

Pro n period:

$$\frac{x_H(t_1)}{x_H(t_1+nT_T)} = e^{\zeta\Omega n T_T}$$

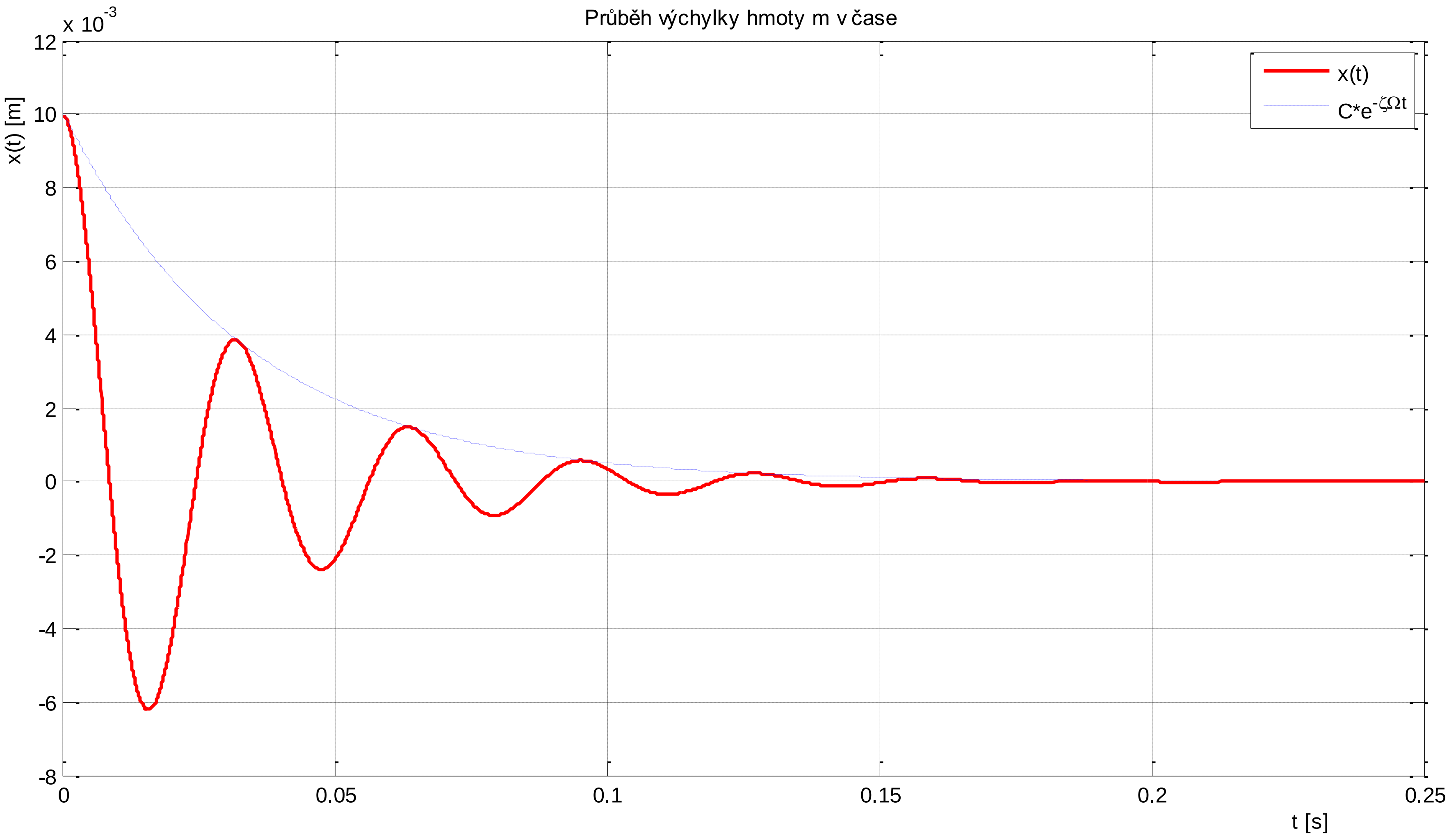
$$\ln\frac{x_H(t_1)}{x_H(t_1+nT_T)} = \zeta\Omega n T_T = n\delta_{LN}$$

výchylka po odeznění 3 period tlumených kmitů:

$$\ln\frac{x_H(0)}{x_H(3T_T)} = 3\delta_{LN}$$

$$x_H(3T_T) = x_H(0)e^{-3\delta_{LN}} = 5.728 \cdot 10^{-4}\ m$$

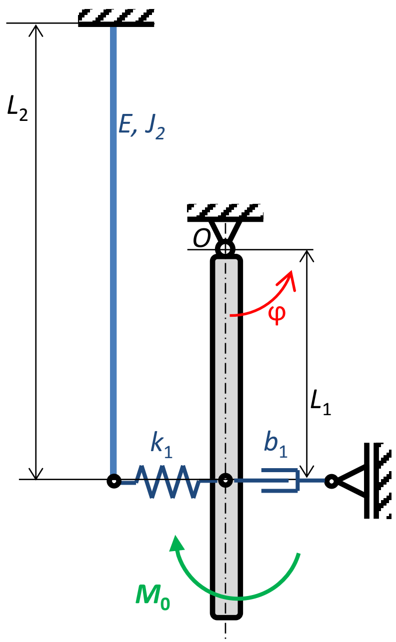
Příklad: Graf výchylky



Tlumené kmitání - Příklad 2

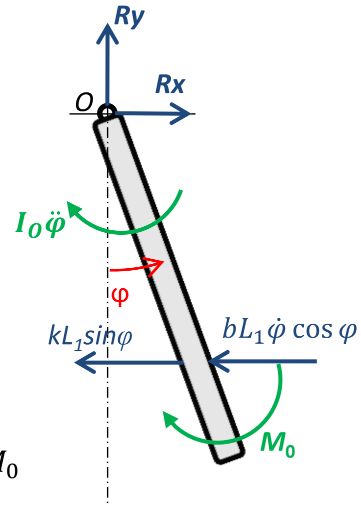
Příklad 2: Napište pohybovou rovnici systému dle obrázku a určete vlastní frekvenci. Spočtěte homogenní řešení, partikulární řešení. Napište vztah pro průběh výchylky hmoty m v čase

Jedná se o homogenní tyč s konstantním průřezem o hmotnosti *m* s momentem setrvačnosti I_O, která je rotačně uložena v bodě *O*. Její rovnovážnou polohu zajišťují 2 pružiny (jedna listová a jedna vinutá) a jeden tlumič . Pružiny a tlumič generují pouze horizontální sílu.



Dáno:

L_1 = 0,1 m	I_O = 0,1 kgm^2
L_2 = 0,2 m	m = 13 kg
k_1 = 6000 N/m	M_0 = 10 Nm
b = 50 Ns/m	
E =2·10^{11} Pa	φ_0 = 0.5 rad
J_2 =8·10^{-11} m^4	ω_0 = 20 rad/s



tuhost listové pružiny:

$$k_2 = \frac{3EJ_2}{L_2^3} = \frac{3\cdot 2\cdot 10^{11}\cdot 8\cdot 10^{-11}}{8\cdot 10^{-3}} = 6000\ Nm^{-1}$$

Celková tuhost – 2 pružiny sériově

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = 3000\ Nm^{-1}$$

Pohybová rovnice:

$$I_O\ddot{\varphi} + bL_1\dot{\varphi}\cos\varphi\, L_1\cos\varphi + kL_1\sin\varphi\, L_1\cos\varphi = -M_0$$

Linearizovaná pohybová rovnice:

$$I_O\ddot{\varphi} + bL_1^2\dot{\varphi} + kL_1^2\varphi = -M_0$$

Pohybová rovnice v normovaném tvaru:

$$\ddot{\varphi} + \frac{bL_1^2}{I_O}\dot{\varphi} + \frac{kL_1^2}{I_O}\varphi = -\frac{M_0}{I_O}$$

vlastní frekvence netlumených kmitů

$$\Omega = \sqrt{\frac{kL_1^2}{I_O}} = \sqrt{\frac{3000\cdot 0{,}1^2}{0{,}1}} = 17.32\ rad.s^{-1}$$

TKMOST

Příklad 2 – homogenní řešení, partikulární řešení

Pohybová rovnice:

$$\ddot{\varphi}+\frac{bL_1^2}{I_O}\dot{\varphi}+\frac{kL_1^2}{I_O}\varphi=-\frac{M_0}{I_O}$$

$$\Omega=\sqrt{\frac{kL_1^2}{I_O}}$$

Homogenní řešení:

$$\lambda_{1,2}=-\frac{bL_1^2}{2I_O}\pm\sqrt{\left(\frac{bL_1^2}{2I_O}\right)^2-\frac{kL_1^2}{I_O}}=-\frac{bL_1^2}{2I_O}\pm\sqrt{\frac{(bL_1^2)^2-4I_OkL_1^2}{4I_O^2}}$$

pokud platí podmínka podkritického tlumení

$$(bL_1^2)^2-4I_OkL_1^2<0$$

pak

$$\frac{(bL_1^2)^2}{4I_OkL_1^2}<1$$

zavádí se poměrný útlum ζ

$$\zeta=\sqrt{\frac{(bL_1^2)^2}{4I_OkL_1^2}}=\frac{bL_1}{2\sqrt{I_Ok}}=0{,}144$$

$$\lambda_{1,2}=-\frac{bL_1^2}{2I_O}\pm i\sqrt{\frac{4I_OkL_1^2-(bL_1^2)^2}{4I_O^2}}=\alpha\pm i\beta$$

$$\varphi_H=C_1e^{\lambda_1t}+C_2e^{\lambda_2t}=C_1e^{(\alpha+i\beta)t}+C_2e^{(\alpha-i\beta)t}$$

$$\varphi_H=C_1e^{\alpha t}\cdot e^{i\beta t}+C_2e^{\alpha t}\cdot e^{-i\beta t}=e^{\alpha t}\left(C_1e^{i\beta t}+C_2e^{-i\beta t}\right)$$

$$\boldsymbol{\varphi_H=e^{\alpha t}(A\cos\beta t+B\sin\beta t)}$$

Partikulární řešení:

odhad

$$\varphi_P=C$$

$$\dot{\varphi}_P=0$$

$$\ddot{\varphi}_P=0$$

$$\frac{kL_1^2}{I_O}\varphi_P=-\frac{M_0}{I_O}$$

$$\varphi_P=-\frac{M_0}{kL_1^2}=-0.333rad$$

Příklad 2 – partikulární řešení, celkové řešení, graf

Celkové řešení

$\varphi(t) = \varphi_H(t) + \varphi_P(t)$

$$\boldsymbol{\varphi(t) = e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t) - \frac{M_0}{kL_1^2}}$$

$$\dot{\varphi}(t) = \alpha e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t) + e^{\alpha t}(-A\beta\sin\beta t + B\beta\cos\beta t)$$

Dosazení počátečních podmínek a výpočet konstant A a B:

$$\varphi(0) = A - \frac{M_0}{kL_1^2} = \varphi_0$$

$$\dot{\varphi}_H(0) = \alpha A + B\beta = \omega_0$$

Číselně:

$$\alpha = -\frac{bL_1^2}{2I_O} = -\zeta\Omega = -2.5$$

$$\beta = \sqrt{\frac{4I_O kL_1^2 - (bL_1^2)^2}{4I_O^2}} = \sqrt{\Omega^2 - (\zeta\Omega)^2} = \Omega\sqrt{1-\zeta^2} = \Omega_T = 17.139$$

$$A = \frac{M_0}{kL_1^2} + \varphi_0 = 0.8333$$

$$B = \frac{\omega_0 - \alpha A}{\beta} = \frac{\omega_0}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{M_0}{kL_1^2} + \varphi_0\right) = 1.2885$$

$\zeta = 0{,}144$

$\Omega = 17.32\,rad.s^{-1}$

$\Omega_T = 17.14\,rad.s^{-1}$

$\zeta\Omega = 2{,}5 rad.s^{-1}$

$\varphi_0 = 0{,}5\,rad$

$\omega_0 = 20\,rad/s$

$$\boldsymbol{\varphi(t) = e^{-2.5t}(0.833\cos(17.139t) + 1.289\sin(17.139t)) - 0.33}$$