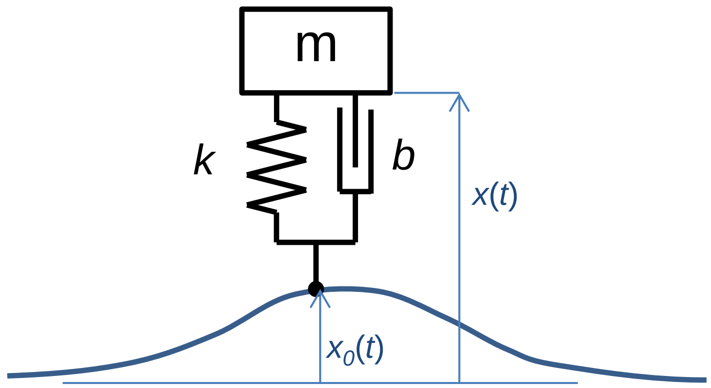
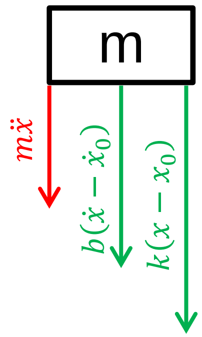
KMS – cvičení 5

Ondřej Marek

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

KINEMATICKÉ BUZENÍ – ABSOLUTNÍ SOUŘADNICE





Pohybová rovnice:

$$m\ddot{x} + b(\dot{x} - \dot{x}_0) + k(x - x_0) = 0$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = b\dot{x}_0 + kx_0$$

Partikulární řešení:

$$x_0 = X_0 e^{i\omega t}$$

$$\dot{x}_0 = i\omega X_0 e^{i\omega t}$$

$$x = \hat{X} e^{i\omega t}$$

$$\dot{x} = i\omega \hat{X} e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 \hat{X} e^{i\omega t}$$

po dosazení do pohybové rovnice:

$$(k - m\omega^2 + ib\omega)\hat{X} e^{i\omega t} = (ib\omega + k) X_0 e^{i\omega t}$$

$$\frac{\hat{X}}{X_0} = \frac{k + ib\omega}{k - m\omega^2 + ib\omega} = \frac{\Omega^2 + i2\zeta\Omega\omega}{\Omega^2 - \omega^2 + i2\zeta\Omega\omega} = \frac{1 + i2\zeta\eta}{1 - \eta^2 + i2\zeta\eta}$$

$$\hat{X} = |X| e^{i\varphi}$$

$$|\Gamma(\eta)| = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\eta)^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}}$$

$$\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + (2\zeta\eta)^2}} - \arccos \frac{1 - \eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}}$$

KINEMATICKÉ BUZENÍ - RELATIVNÍ SOUŘADNICE

$x = x_0 + x_r$

Pohybová rovnice:

$m\ddot{x}_r + b\dot{x}_r + kx_r = -m\ddot{x}_0$

Partikulární řešení:

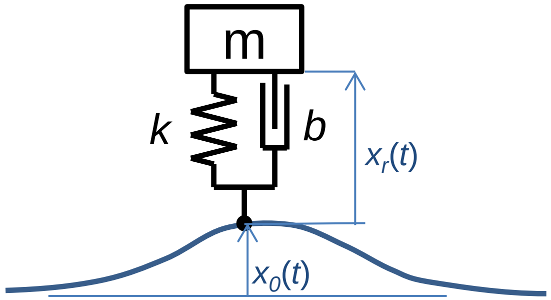
$x_0 = X_0 e^{i\omega t}$

$\ddot{x}_0 = \omega^2 X_0 e^{i\omega t}$

$x_r = \hat{X}_r e^{i\omega t}$

$\dot{x}_r = i\omega \hat{X}_r e^{i\omega t}$

$\ddot{x}_r = -\omega^2 \hat{X}_r e^{i\omega t}$



po dosazení do pohybové rovnice:

$(k - m\omega^2 + ib\omega)\hat{X}_r e^{i\omega t} = m\omega^2 X_0 e^{i\omega t}$

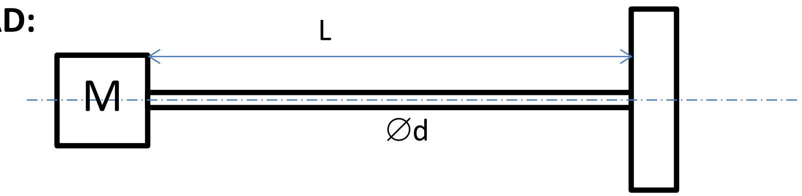
$$\frac{\hat{X}_r}{X_0} = \frac{m\omega^2}{k - m\omega^2 + ib\omega} = \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2 + i2\zeta\Omega\omega} = \frac{\eta^2}{1 - \eta^2 + i2\zeta\eta}$$

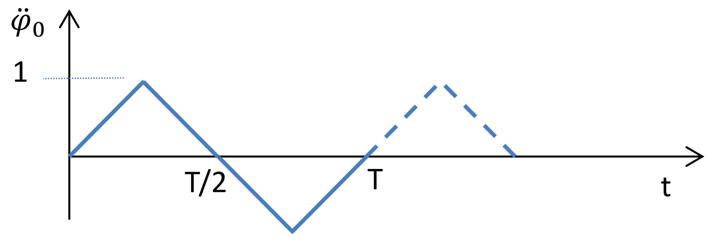
$$|\Gamma(\eta)| = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}}$$

$$\varphi = -\arccos\frac{1-\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2\zeta\eta)^2}}$$

Příklad - kinematické buzení

PŘÍKLAD:





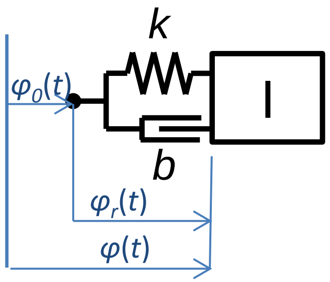
Motor M pohání hřídel, ke kterému je připojen setrvačník s momentem setrvačnosti I=0,1kgm^2, střední úhlovou rychlostí n=1500ot/min. Motor má ovšem nerovnoměrný chod, který je definován pomocí oscilace úhlového zrychlení $\ddot{\varphi}_0$

Vyšetřete vybuzené kmity v soustavě (frekvence a amplitudy)

G=80 GPa, d=30mm, L=0.5m, ζ=0.2

ŘEŠENÍ:

Pokud se neuvažuje moment setrvačnosti rotoru motoru, pak lze úlohu chápat jako kinematické buzení setrvačníku na poddajném hřídeli.



Pohybová rovnice v absolutních souřadnicích:

$$I\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + k\varphi = b\dot{\varphi}_0 + k\varphi_0$$

Pohybová rovnice v relativních souřadnicích:

$$I\ddot{\varphi}_r + b\dot{\varphi}_r + k\varphi_r = -I\ddot{\varphi}_0$$

Příklad (2)

Z pohybových rovnic je patrné, že je výhodnější úlohu řešit v relativních souřadnicích, jelikož na pravé straně vystupuje zrychlení.

$$\ddot{\varphi}_r + \frac{b}{I}\dot{\varphi}_r + \frac{k}{I}\varphi_r = -\ddot{\varphi}_0$$

$$\ddot{\varphi}_r + 2\zeta\Omega\dot{\varphi}_r + \Omega^2\varphi_r = -\ddot{\varphi}_0$$

torzní tuhost:

$$k = \frac{GJ_p}{L} = \frac{G}{L}\frac{\pi d^4}{32}$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{I}} = \sqrt{\frac{G}{IL}\frac{\pi d^4}{32}} = \sqrt{\frac{80 \cdot 10^9 \cdot 0.03^4\,\pi}{32 \cdot 0.1 \cdot 0.5}} = 356.7\,rad/s$$

Jelikož je buzení periodické, ale není harmonické, bude snahou nejprve nahradit periodickou funkci $\ddot{\varphi}_0(t)$ pomocí řady harmonických funkcí (fourierův rozvoj).

Náhrada Fourierovým rozvojem:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt\,,\, a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,dt\,,\, b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega t\,dt$$

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = 157\,rad/s$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{60}{n}$$

Příklad (3)

Náhrada průběhu síly Fourierovým rozvojem:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = 0$$

$$a_1 = \frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}} \frac{4}{T}t\cos\omega t\,dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \left(2-\frac{4}{T}t\right)\cos\omega\,dt + \int_{\frac{3T}{4}}^{T} \left(-4+\frac{4}{T}t\right)\cos\omega\,dt\right) = 0$$

$$b_1 = \frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}} \frac{4}{T}t\sin\omega t\,dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \left(2-\frac{4}{T}t\right)\sin\omega\,dt + \int_{\frac{3T}{4}}^{T} \left(-4+\frac{4}{T}t\right)\sin\omega\,dt\right) = \frac{2}{T}\left(\frac{T}{\pi^2}+\frac{2T}{\pi^2}+\frac{T}{\pi^2}\right) = \frac{8}{\pi^2}$$

$$a_2 = \frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}} \frac{4}{T}t\cos 2\omega t\,dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \left(2-\frac{4}{T}t\right)\cos 2\omega\,dt + \int_{\frac{3T}{4}}^{T} \left(-4+\frac{4}{T}t\right)\cos 2\omega\,dt\right) = \frac{2}{T}\left(-\frac{T}{2\pi^2}+0+\frac{T}{2\pi^2}\right) = 0$$

$$b_2 = \frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}} \frac{4}{T}t\sin 2\omega t\,dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \left(2-\frac{4}{T}t\right)\sin 2\omega\,dt + \int_{\frac{3T}{4}}^{T} \left(-4+\frac{4}{T}t\right)\sin 2\omega\,dt\right) = \frac{2}{T}\left(\frac{T}{4\pi}-\frac{T}{2\pi}+\frac{T}{4\pi}\right) = 0$$

$$a_3 = \frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}} \frac{4}{T}t\cos 3\omega t\,dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \left(2-\frac{4}{T}t\right)\cos 3\omega\,dt + \int_{\frac{3T}{4}}^{T} \left(-4+\frac{4}{T}t\right)\cos 3\omega\,dt\right) = 0$$

$$b_3 = b_2 = \frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}} \frac{4}{T}t\sin 3\omega t\,dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \left(2-\frac{4}{T}t\right)\sin 3\omega\,dt + \int_{\frac{3T}{4}}^{T} \left(-4+\frac{4}{T}t\right)\sin 3\omega\,dt\right) = -\frac{8}{(3\pi)^2}$$

$a_4 = 0$

$b_4 = 0$

$a_5 = 0$

$b_5 = \dfrac{8}{(5\pi)^2}$

$a_6 = 0$

$b_6 = 0$

$a_7 = 0$

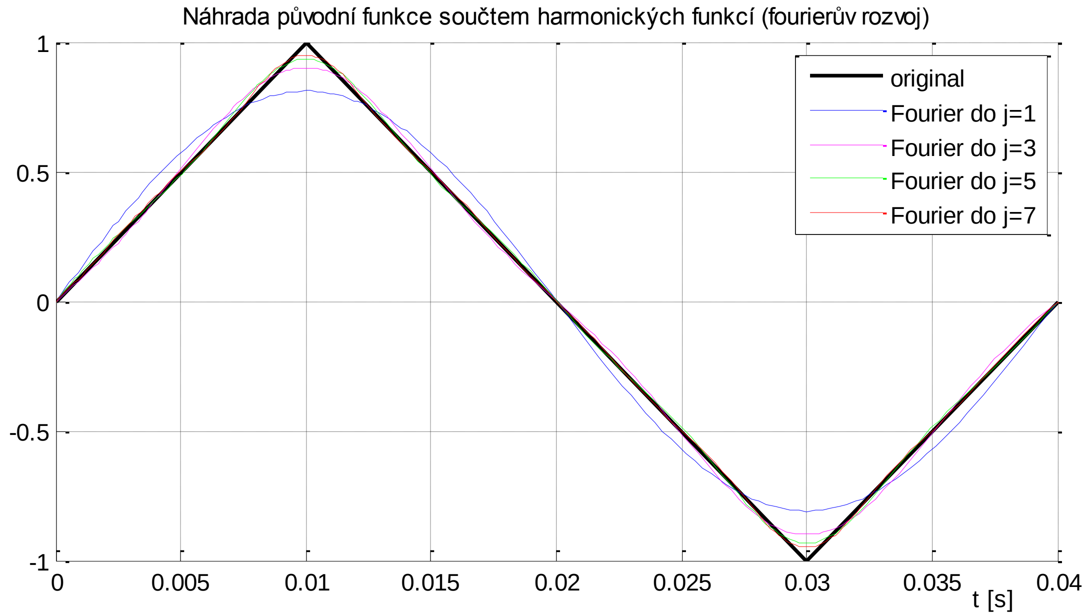
$b_7 = -\dfrac{8}{(7\pi)^2}$

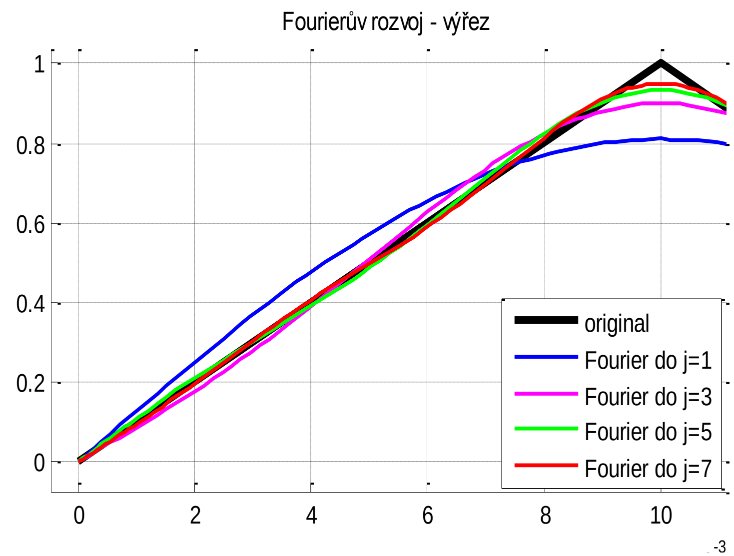
Rozvoj do řádu 5 vypadá následovně:

$$\ddot{\varphi}(t) \cong \frac{8}{\pi^2}\sin\frac{\pi n}{30}t - \frac{8}{(3\pi)^2}\sin\frac{3\pi n}{30}t + \frac{8}{(5\pi)^2}\sin\frac{5\pi n}{30}t$$

Lze si všimnout, že nenulové jsou pouze liché koeficienty b a jsou prvky posloupnosti, $\ddot{\varphi}(t)$ pak lze zapsat jako součet řady:

$$\ddot{\varphi}(t) = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{8}{(2j-1)^2\pi^2}\sin\left((2j-1)\frac{\pi n}{30}t\right)$$





Příklad (3)

Jelikož se jedná o případ vynuceného kmitání a soustava je tlumená, má smysl počítat pouze partikulární řešení (homogenní po čase odezní díky útlumu).

Původní pohybová rovnice:
$\ddot{\varphi}_r + 2\zeta\Omega\dot{\varphi}_r + \Omega^2\varphi_r = -\ddot{\varphi}_0$

Funkce na pravé straně je známá a je již známá i náhrada funkce fourierovým rozvojem. Lze zapsat následovně

$$\ddot{\varphi}_r + 2\zeta\Omega\dot{\varphi}_r + \Omega^2\varphi_r = -\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega t + b_k\sin k\omega t)\right)$$

$$\ddot{\varphi}_r + 2\zeta\Omega\dot{\varphi}_r + \Omega^2\varphi_r = -\frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\Phi}_k e^{ik\omega t}$$

V případě funkce z příkladu lze psát:

$$\ddot{\varphi}_r + 2\zeta\Omega\dot{\varphi}_r + \Omega^2\varphi_r = -\frac{8}{\pi^2}\sin\frac{\pi n}{30}t + \frac{8}{(3\pi)^2}\sin\frac{3\pi n}{30}t - \frac{8}{(5\pi)^2}\sin\frac{5\pi n}{30}t + \cdots$$

$$\ddot{\varphi}_r + 2\zeta\Omega\dot{\varphi}_r + \Omega^2\varphi_r = -\frac{8}{\pi^2}\left(-ie^{i\omega t}\right) + \frac{8}{(3\pi)^2}\left(-ie^{i3\omega t}\right) - \frac{8}{(5\pi)^2}\left(-ie^{i5\omega t}\right) + \cdots$$

odhad partikulárního řešení:

$$\varphi_{rP} = \widehat{\Phi}_{r1}\left(-ie^{i\omega t}\right) + \widehat{\Phi}_{r3}\left(-ie^{i3\omega t}\right) + \widehat{\Phi}_{r5}\left(-ie^{i5\omega t}\right) + \cdots$$

$$\dot{\varphi}_{rP} = i\omega\widehat{\Phi}_{r1}\left(-ie^{i\omega t}\right) + 3i\omega\widehat{\Phi}_{r3}\left(-ie^{i3\omega t}\right) + 5i\omega\widehat{\Phi}_{r5}\left(-ie^{i5\omega t}\right) + \cdots$$

$$\ddot{\varphi}_{rP} = -\omega^2\widehat{\Phi}_{r1}\left(-ie^{i\omega t}\right) - (3\omega)^2\widehat{\Phi}_{r3}\left(-ie^{i3\omega t}\right) - (5\omega)^2\widehat{\Phi}_{r5}\left(-ie^{i5\omega t}\right) + \cdots$$

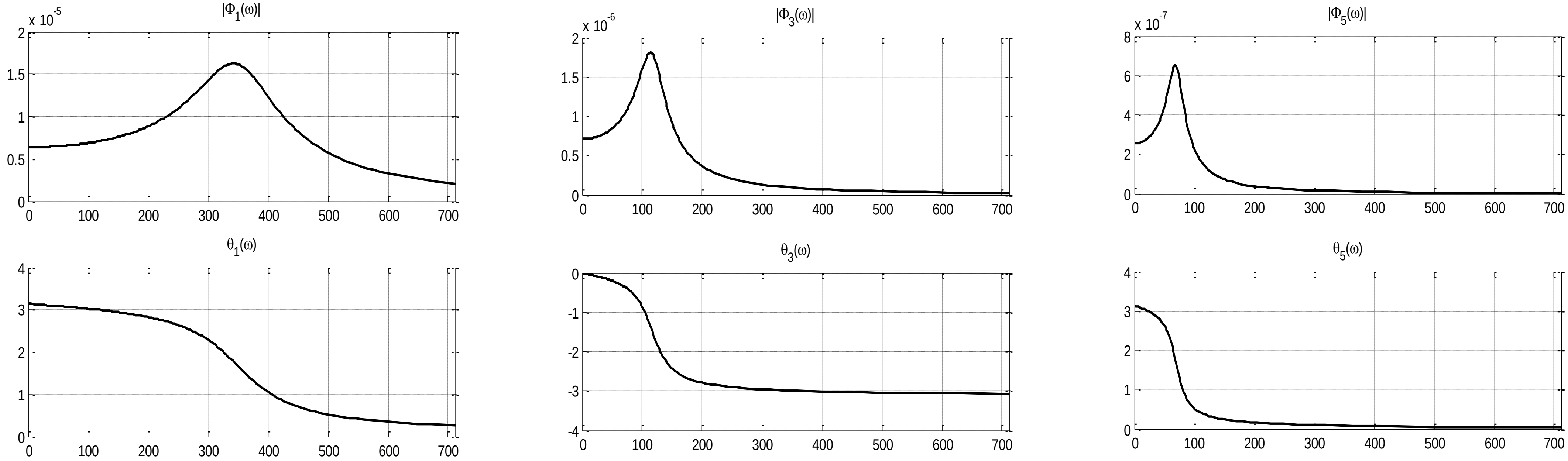
$$(\Omega^2-\omega^2+2i\zeta\Omega\omega)\widehat{\Phi}_{r1}e^{i\omega t}+(\Omega^2-(3\omega)^2+2i\zeta\Omega 3\omega)\widehat{\Phi}_{r3}e^{i3\omega t}+(\Omega^2-(5\omega)^2+2i\zeta\Omega 5\omega)\widehat{\Phi}_{r5}e^{i5\omega t}+\cdots$$
$$=-\frac{8}{\pi^2}\left(-ie^{i\omega t}\right)+\frac{8}{(3\pi)^2}\left(-ie^{i3\omega t}\right)-\frac{8}{(5\pi)^2}\left(-ie^{i5\omega t}\right)+\cdots$$

V rovnici jsou vytknuty výrazy $-ie^{i\omega t}$, $-ie^{i3\omega t}$, $-ie^{i5\omega t}$ jak na levé, tak i na pravé straně. Z rovnice lze psát 3 (obecně n) rovnic. ze kterých lze vyjádřit komplexní amplitudy vybuzených kmitů $\widehat{\Phi}_{rj}$ pro jednotlivé frekvence. Komplexní amplituda v sobě zahrnuje informaci o velikosti a fázovém posunutí (zpoždění).

$$(\Omega^2-\omega^2+2i\zeta\Omega\omega)\widehat{\Phi}_{r1}=-\frac{8}{\pi^2}$$
$$(\Omega^2-(3\omega)^2+2i\zeta\Omega 3\omega)\widehat{\Phi}_{r3}=\frac{8}{(3\pi)^2}$$
$$(\Omega^2-(5\omega)^2+2i\zeta\Omega 5\omega)\widehat{\Phi}_{r5}=-\frac{8}{(5\pi)^2}$$
$$\widehat{\Phi}_{r1}=\frac{-8}{\pi^2\Omega^2-\pi^2\omega^2+i\cdot 2\pi^2\zeta\Omega\omega}=\frac{-8}{1.012\cdot 10^6\ +i\cdot 2.212\cdot 10^5}=-7.54\cdot 10^{-6}+i\cdot 1.65\cdot 10^{-6}$$
$$\widehat{\Phi}_{r3}=\frac{8}{9\pi^2\Omega^2-81\pi^2\omega^2+i\cdot 54\pi^2\zeta\Omega\omega}=-6.32\cdot 10^{-7}-i\cdot 4.481\cdot 10^{-7}$$
$$\widehat{\Phi}_{r5}=\frac{-8}{25\pi^2\Omega^2-625\pi^2\omega^2+i\cdot 250\pi^2\zeta\Omega\omega}=6.29\cdot 10^{-8}+i\cdot 1.44\cdot 10^{-8}$$

$$\widehat{\Phi}_{r1}=|\Phi_{r1}|e^{i\theta_1}=7.721\cdot 10^{-6}\cdot e^{i\cdot 2.926}$$
$$\widehat{\Phi}_{r3}=|\Phi_{r3}|e^{i\theta_3}=7.748\cdot 10^{-7}\cdot e^{-i\cdot 2.525}$$
$$\widehat{\Phi}_{r5}=|\Phi_{r5}|e^{i\theta_5}=6.455\cdot 10^{-8}\cdot e^{i\cdot 0.225}$$

Amplitudo-fázové charakteristiky, průběh $\varphi_r(t)$



Jelikož proběhla náhrada $\sin k\omega t = Re\left(-ie^{ik\omega t}\right)$, pak lze do celkového řešení dosazovat opět rovnou $\sin k\omega t$.

$$\varphi_r(t) = |\Phi_{r1}|\sin(\omega t + \theta_1) + |\Phi_{r3}|\sin(3\omega t + \theta_3) + |\Phi_{r5}|\sin(5\omega t + \theta_5) + \cdots$$

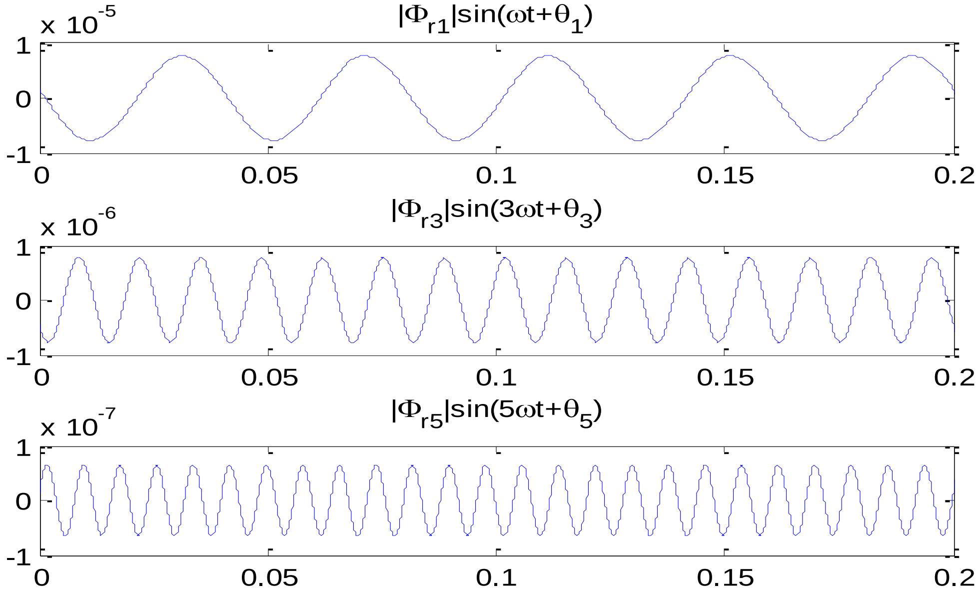
$$\boldsymbol{\varphi_r(t) = 7.721 \cdot 10^{-6}\sin(157t + 2.926) + 7.748 \cdot 10^{-7}\sin(471 - 2.525) + 6.46 \cdot 10^{-8}\sin(785t + 0.225) + \cdots}$$

Průběh $\varphi_r(t)$ - grafy

1. harmonická

3. harmonická

5. harmonická



součet 1., 3. a 5. harmonické