Zákony bilance

- Bilance hmotnosti
- Bilance hybnosti
- Bilance momentu hybnosti
- Bilance mechanické energie

Kontinuum – termodynamický systém

- Pevné těleso = většinou uzavřený systém
- Konstantní hmotnost - nezávisí na čase
- Dochází k výměně energie mezi systémem a okolím přestupem tepla a prací povrchových a objemových sil

- Stavové veličiny: tlak, objem, teplota, entropie
- extensivní (aditivní – jsou úměrné množství hmotnosti v soustavě : entropie, energie apod.) a intensivní (nezávislé na množství hmotnosti: tlak, teplota apod.)

Bilance veličiny

Bilancovaná veličina $\Phi(t)$ má hustotu

$\phi(\mathbf{X},t)$ v materiálovém a $\varphi(\mathbf{x},t)$ v prostorovém popisu.

Celková hodnota veličiny je dána integrálem

$$\Phi(t) = \int_V \phi(\mathbf{X},t)\,dV = \int_v \varphi(\mathbf{x},t)\,dv$$

Časová změna (přírůstek) veličiny může být způsoben:

1. Přítokem /odtokem veličiny přes hranici tělesa $J(\Phi)$
2. Vznikem (zdrojem) / zánikem (propadem) veličiny uvnitř tělesa $P(\Phi)$

To vyjadřuje bilanční rovnice:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \dot{\Phi} = J(\Phi) + P(\Phi),$$

$$J(\Phi) = \int_S \Lambda(\Phi)\,dA = \int_s \lambda(\Phi)\,da, \quad \Lambda, \lambda = \text{hustoty toku v mater. a prost. popisu}$$

$$P(\Phi) = \int_V \Pi(\Phi)\,dV = \int_v \pi(\Phi)\,dv, \quad \Pi, \pi = \text{hustoty produkce veličiny } \Phi$$

Reynoldsův transportní teorém I.

- RTT má jméno po Osborne Reynoldsovi (1842-1912)
- RTT se používá při derivaci veličin v integrálech
- Používá se při formulaci základních zákonů zachování v mechanice kontinua
- V rovnicích Navier-Stokes

Reynoldsův transportní teorém II.

- Často potřebujeme materiálovou derivaci integrálů typu:

$$I(t) = \int_v \Phi(\mathbf{x},t)\,dv,$$

- Kde integrovaná funkce i integrační oblast jsou v prostorové konfiguraci
- Oblastí integrace je objem *v*, který se mění s časem a tedy nelze prohodit derivování a integrování
- Integrál převedeme do materiálové konfigurace:

$$\dot{I}(t) = \frac{DI(t)}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_v \Phi(\mathbf{x},t)\,dv = \frac{D}{Dt}\int_V \Phi\left(\chi(\mathbf{X},t),t\right) J(\mathbf{X},t)\,dV$$

- Nyní se oblast integrace nemění a lze prohodit integraci a derivaci – nejprve derivovat za integr. symbolem

Reynoldsův transportní teorém III.

$$\dot{I}(t) = \frac{D}{Dt}\int_V \Phi\left(\chi(\mathbf{X},t),t\right) J(\mathbf{X},t)\,dV =$$

$$= \int_V \left[\dot{\Phi}\left(\chi(\mathbf{X},t),t\right) J(\mathbf{X},t) + \Phi\left(\chi(\mathbf{X},t),t\right)\dot{J}(\mathbf{X},t)\right] dV =$$

$$= \int_V \left[\dot{\Phi}\left(\chi(\mathbf{X},t),t\right) + \Phi\left(\chi(\mathbf{X},t),t\right)\frac{\dot{J}(\mathbf{X},t)}{J(\mathbf{X},t)}\right] J(\mathbf{X},t)\,dV.$$

Nyní lze integrál převést zpět do prostorové konfigurace:

$$\frac{\dot{J}(\mathbf{X},t)}{J(\mathbf{X},t)} = div\,\mathbf{v}(\mathbf{x},t), \quad J(\mathbf{X},t)\,dV = dv,$$

$$\dot{I}(t) = \int_v \left[\dot{\Phi}(\mathbf{x},t) + \Phi(\mathbf{x},t)\,div\,\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\right] dv,$$

$$\frac{D}{Dt}\int_v \Phi\,dv = \int_v \left[\dot{\Phi} + \Phi\,div\,\mathbf{v}\right] dv.$$

Reynoldsův transportní teorém IV.

- Budiž T libovolná skalární, vektorová, nebo tenzorová funkce

$$T = \varphi(\mathbf{x},t) = \phi(\mathbf{X},t),$$

Platí:

$$\frac{D}{Dt}\int_v \rho T\, dv = \int_v \rho \dot{T}\, dv,$$

Důkaz:

$$\int_v \rho\varphi(\mathbf{x},t)\, dv = \int_V \rho\phi(\mathbf{X},t)\, J dV = \int_V \rho_0\phi(\mathbf{X},t)\, dV$$

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho_0\phi(\mathbf{X},t)\, dV = \int_V \rho_0 \left.\frac{\partial\phi(\mathbf{X},t)}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}=konst} dV = \int_V \rho_0\dot{T}\, dV =$$

$$= \int_V J\rho\dot{T}\, dV = \int_v \rho\dot{T}\, dv.$$

Bilance hmotnosti – rovnice kontinuity

- Předpokládáme, že během pohybu tělesa hmotnost nově nevzniká aniž by zanikala. Celková hmotnost nějakého objemu je konstantní během pohybu.
- Předp., že těleso v čase *t=0* má hustotu ρ_0 a objem V a zaujímá oblast Ω_0, v čase t má hustotu ρ a objem *v* a zaujímá oblast Ω.
- Z principu zachování hmotnosti vyplývá:

$$\int_V \rho_0(\mathbf{X})\,dV = \int_v \rho(\mathbf{x},t)\,dv, \quad kde \quad \frac{dv}{dV} = J \Rightarrow$$

$$\int_V \Big(\rho_0(\mathbf{X}) - J\rho\big(\chi(\mathbf{X},t),t\big)\Big)dV = 0 \quad = \ \text{globální tvar,}$$

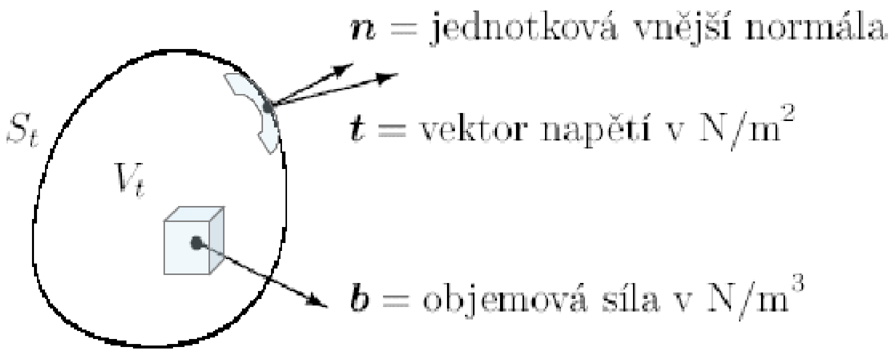
$$\rho_0(\mathbf{X}) = J\rho\big(\chi(\mathbf{X},t),t\big) \quad = \ \text{lokální tvar.}$$

$$\frac{D\rho_0(\mathbf{X})}{Dt} = \frac{DJ}{Dt}\rho\big(\chi(\mathbf{X},t),t\big) + J\,\frac{D\rho\big(\chi(\mathbf{X},t),t\big)}{Dt},$$

$$0 = \rho J\, div\,\mathbf{v} + J\dot{\rho} \quad \Rightarrow \quad rovnice\ kontinuity$$

$$0 = \rho\, div\,\mathbf{v} + \dot{\rho}$$

Bilance hybnosti v prostorové konfiguraci



V_t objem vyjmutý z deformovaného tělesa, S_t jeho povrch. Na jednotku objemu působí spojitá objemová síla **b**(**x**,t), na povrch oblasti působí vektor napětí **t**(**x**,t).

Výsledná síla na vyjmutou oblast

$$\mathbf{f}(t) = \int_{V_t} \mathbf{b}(\mathbf{x},t)\,dV_t + \int_{S_t} \mathbf{t}(\mathbf{x},t)\,dS_t$$

Hybnost v oblasti: $\mathbf{p}(t) = \int_{V_t} \rho \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\,dV_t = \int_{V_0} \rho_0 \mathbf{V}(\mathbf{X},t)\,dV_0$

Bilance hybnosti - materiálový časový přírůstek hybnosti je roven výsledné síle

$$\frac{D\mathbf{p}}{Dt} = \mathbf{f} \quad \Rightarrow \frac{D}{Dt}\int_{V_t} \rho \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\,dV_t = \int_{V_t} \mathbf{b}(\mathbf{x},t)\,dV_t + \int_{S_t} \mathbf{t}(\mathbf{x},t)\,dS_t.$$

$$\int_{V_t} \rho \mathbf{a}(\mathbf{x},t)\,dV_t = \int_{V_t} \mathbf{b}(\mathbf{x},t)\,dV_t + \int_{S_t} \mathbf{t}(\mathbf{x},t)\,dS_t \text{ v prostorové konfig.}$$

Bilance hybnosti v materiálových souřadnicích

B=objemová síla v materiálovém popisu (pseudo-síla) [N/m^3]

T=napěťový vektor v materiálovém popisu) [N/m^2]

$$\int_{V_t} \mathbf{b}(\mathbf{x},t)dV_t = \int_{V_0} \mathbf{b}\left(\chi(\mathbf{X},t),t\right)J(\mathbf{X},t)\,dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{B}(\mathbf{X},t)\,dV_0,$$

$$\int_{S_t} \mathbf{t}(\mathbf{x},t)dS_t = \int_{S_0} \mathbf{T}(\mathbf{X},t,\mathbf{N})dS_0,$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_0} \rho_0 \mathbf{V}\,dV = \int_{V_0} \mathbf{B}(\mathbf{X},t)\,dV_0 + \int_{S_0} \mathbf{T}(\mathbf{X},t,\mathbf{N})dS_0.$$

1. Cauchyho pohybová rovnice v prostorovém a materiálovém popisu:

$$\int_{S_t} \mathbf{t}(\mathbf{x},t,\mathbf{n})dS_t = \int_{S_t} \sigma(\mathbf{x},t)\mathbf{n}\,dS_t = \int_{V_t} div\sigma(\mathbf{x},t)\,dV_t,$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{V_t} \rho\mathbf{v}(\mathbf{x},t)dV_t = \int_{V_t} (\mathbf{b}(\mathbf{x},t) + div\sigma(\mathbf{x},t))dV_t \Rightarrow \text{1. Cauchy pohyb. rov.}$$

$$\int_{V_t} \left(div\sigma + \mathbf{b} - \rho\dot{\mathbf{v}}\right)dV_t = \mathbf{0} \quad \sim \quad \int_{V_0} \left(Div\mathbf{P} + \mathbf{B} - \rho_0\dot{\mathbf{V}}\right)dV_0 = \mathbf{0}$$

$$div\sigma + \mathbf{b} = \rho\dot{\mathbf{v}} \sim \frac{\partial\sigma_{ab}}{\partial x_b} + b_a = \rho\dot{v}_a \sim Div\mathbf{P} + \mathbf{B} = \rho_0\dot{\mathbf{V}} \sim \frac{\partial P_{aB}}{\partial X_B} + B_a = \rho\dot{V}_a.$$

Bilance momentu hybnosti, symetrie Cauchy napěťového tenzoru

Výsledný moment sil působících na vyjmutou oblast

$$\mathbf{M}(t)=\int_{V_t}\mathbf{r}\times\mathbf{b}(\mathbf{x},t)dV_t+\int_{S_t}\mathbf{r}\times\mathbf{t}(\mathbf{x},t)dS_t$$

Vnitřní moment hybnosti v oblasti: $\mathbf{J}(t)=\int_{V_t}\mathbf{r}\times\rho\mathbf{v}(\mathbf{x},t)dV_t=\int_{V_0}\mathbf{r}\times\rho_0\mathbf{V}(\mathbf{X},t)dV_0$

Bilance momentu hybnosti - materiál. derivace mom. hybn. je rovna výsled. momentu

$$\frac{D\mathbf{J}(t)}{Dt}=\mathbf{M}(t)\quad\Rightarrow\frac{D}{Dt}\int_{V_t}\mathbf{r}\times\rho\mathbf{v}(\mathbf{x},t)dV_t=\int_{V_t}\mathbf{r}\times\mathbf{b}(\mathbf{x},t)dV_t+\int_{S_t}\mathbf{r}\times\mathbf{t}(\mathbf{x},t)dS_t\Rightarrow$$

$$\int_{S_t}\mathbf{r}\times\mathbf{t}(\mathbf{x},t)dS_t=\int_{S_t}\mathbf{r}\times\sigma(\mathbf{x},t)\mathbf{n}dS_t=\int_{V_t}\left(\mathbf{r}\times div\sigma+\boldsymbol{\varepsilon}:\sigma^T\right)dV,$$

$$\int_{V_t}\mathbf{r}\times\left(\rho\dot{\mathbf{v}}-div\sigma-\mathbf{b}\right)dV_t=\int_{V_t}\boldsymbol{\varepsilon}:\sigma^T dV\Rightarrow\boldsymbol{\varepsilon}:\sigma^T=\mathbf{0}\sim\varepsilon_{abc}\sigma_{cb}=0\Rightarrow\sigma=\sigma^T.$$

Pokud v tělese nepůsobí objemové síly v podobě rovnoměrně rozložených momentů (nepolární kontinuum), je Cauchyho napěťový tenzor symetrický – 2. Cauchyho pohybová rovnice. Vyplývá z toho, že **2.P-K** tenzor napětí **S** a **Kirchhoff**. tenz. nap. **τ**=J**σ** jsou rovněž symetrické**.**

Bilance mechanické energie = důsledek Cauchyho první pohybové rovnice

- Předpokládáme dynamický proces daný Cauchyho tenzorem napětí $\sigma(\mathbf{x},t)$ a pohybem $\mathbf{x}=\chi(\mathbf{X},t)$, který deformuje oblast Ω_0 na Ω s hranicí $\delta\Omega$
- Vnější mechanický výkon $\mathcal{P}_{ext}(t)$, kinetická energie $\mathcal{K}(t)$ a výkon napětí $\mathcal{P}_{int}(t)$

$$\text{Výkon vnějších sil}: \ \mathcal{P}_{ext}(t) = \int_{\Omega} \mathbf{b}\cdot\mathbf{v}\,dv + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}\cdot\mathbf{v}\,ds,$$

$$\text{Výkon vnitřních sil}: \quad \mathcal{P}_{int}(t) = \int_{\Omega} \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d}\,dv = \int_{\Omega} tr\left(\underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{d}\right) dv,$$

$$\text{Kinetická energie}: \mathcal{K}(t) = \int_{\Omega} \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 dv = \int_{\Omega} \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\,dv,$$

Bilance mechanické energie v prostorovém popisu :

$$\frac{D}{Dt}\mathcal{K}(t) + \mathcal{P}_{int}(t) = \mathcal{P}_{ext}(t).$$

- Součet časového přírůstku kinetické energie a výkonu vnitřních sil (výkonu napětí) je roven výkonu vnějších sil (hmotových sil a povrchových sil).
- Je-li $\mathcal{P}_{ext}$=0, pak se jedná o vlastní kmity. Pokud je roven 0 časový přírůstek $\mathcal{K}(t)$, pak se jedná o kvazistatický problém.

Vnitřní energie

- Zaveďme vnitřní energii - termodynamická stavová veličina – hustota vnitřní energie $u(\mathbf{x},t)$ na jednotku objemu v deformované konfiguraci. Pokud bereme v úvahu pouze mechanickou energii, pak časový přírůstek vnitřní energie $\mathcal{U}(t)$ je roven výkonu napětí $\mathcal{P}_{\mathrm{int}}(t)$:

$$\mathcal{U}\left(t\right) = \int_{\Omega} u\left(\mathbf{x}, t\right) dv, \quad \mathcal{P}_{int}\left(t\right) = \frac{D}{Dt}\mathcal{U}\left(t\right)$$

Celková energie je součet kinetické a vnitřní energie

$$\mathcal{K}\left(t\right) + \mathcal{U}\left(t\right) = \int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + u\right)dv$$

$$\frac{D}{Dt}\mathcal{K}\left(t\right) + \frac{D}{Dt}\mathcal{U}\left(t\right) = \mathcal{P}_{ext}\left(t\right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{D}{Dt}\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + u\right)dv = \int_{\Omega}\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}\,dv + \int_{\partial\Omega}\mathbf{t}\cdot\mathbf{v}\,dv,$$

Bilance mechanické energie v materiálovém popisu

Výkon vnějších sil: $\mathcal{P}_{ext}\left(t\right)=\int\limits_{\Omega_0}\mathbf{B}\cdot\mathbf{V}dV+\int\limits_{\partial\Omega_0}\mathbf{T}\cdot\mathbf{V}dS,$

Kinetická energie: $\mathcal{K}\left(t\right)=\int\limits_{\Omega_0}\frac{1}{2}\rho_0\mathbf{V}^2dV=\int\limits_{\Omega_0}\frac{1}{2}\rho_0\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}dV,$

Výkon vnitřních sil: $\mathcal{P}_{int}\left(t\right)=\int\limits_{\Omega}\underset{\sim}{\sigma}:\underset{\sim}{d}\,dv=\int\limits_{\Omega}\underset{\sim}{\sigma}:\left(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{\mathbf{-1}}\right)dv=$

$$=\int\limits_{\Omega}\underset{\sim}{\sigma}\mathbf{F}^{-T}:\dot{\mathbf{F}}\,dv=\int\limits_{\Omega_0}J\underset{\sim}{\sigma}\mathbf{F}^{-T}:\dot{\mathbf{F}}\,dV=\int\limits_{\Omega_0}\mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}}\,dV=\int\limits_{\Omega_0}tr\left(\mathbf{P}^T\dot{\mathbf{F}}\right)dV$$

Bilance mechanické energie v materiálovém popisu:

$$\frac{D}{Dt}\int\limits_{\Omega_0}\frac{1}{2}\rho_0\mathbf{V}^2dV+\int\limits_{\Omega_0}\mathbf{P}:\dot{\mathbf{F}}\,dV=\int\limits_{\Omega_0}\mathbf{B}\cdot\mathbf{V}dV+\int\limits_{\partial\Omega_0}\mathbf{T}\cdot\mathbf{V}dS.$$

- Konjugované dvojice
- = jejich skalární součin (dvojí kontrakce (:) napěťového tenzoru a sdruženého tenzoru rychlosti deformace) představuje skutečný fyzikální výkon – časový přírůstek práce vnitřních sil (výkon napětí) na jednotku objemu

Alternativní vyjádření pro výkon napětí – konjugované dvojice

$$\mathcal{P}_{int}(t) = \int_{\Omega} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\mathbf{d}}\, dv, \text{ Cauchy tenzor napětí : grad } \mathbf{v}$$

$$\mathcal{P}_{int}(t) = \int_{\Omega_0} J\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\mathbf{d}}\, dV, \quad \text{Finger tenzor napětí : grad } \mathbf{v}$$

$$\mathcal{P}_{int}(t) = \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}\, dV, \quad \text{1. Piola-Kirch. tenzor napětí : } \dot{\mathbf{F}}$$

$$\mathcal{P}_{int}(t) = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}\, dV = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}}\, dV, \text{ 2. Piola-Kirch. : } \dot{\mathbf{E}}$$

$$\mathcal{P}_{int}(t) = \int_{\Omega_0} \Sigma : \frac{1}{2}\mathbf{C}^{-1}\dot{\mathbf{C}}\, dV, \quad \text{Mandel tenzor napětí}$$

$$\mathcal{P}_{int}(t) = \int_{\Omega_0} J\left(\mathbf{R}^{T}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{R}\right) : \left(\mathbf{R}^{-1}\underset{\sim}{\mathrm{d}}\mathbf{R}^{-T}\right) dV = \int_{\Omega_0} J\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_r : \mathbf{D}_r\, dV,$$

rotované $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ a $\underset{\sim}{\mathbf{d}}$

$$\mathcal{P}_{int}(t) = \int_{\Omega_0} sym\mathbf{T}_B : \dot{\mathbf{U}}\, dV. \quad \text{Biot tenzor napětí : } \dot{\mathbf{U}}$$