

Bilance energie v termodynamice kontinua

První a druhý zákon termodynamiky

Termodynamické kontinuum (systém)

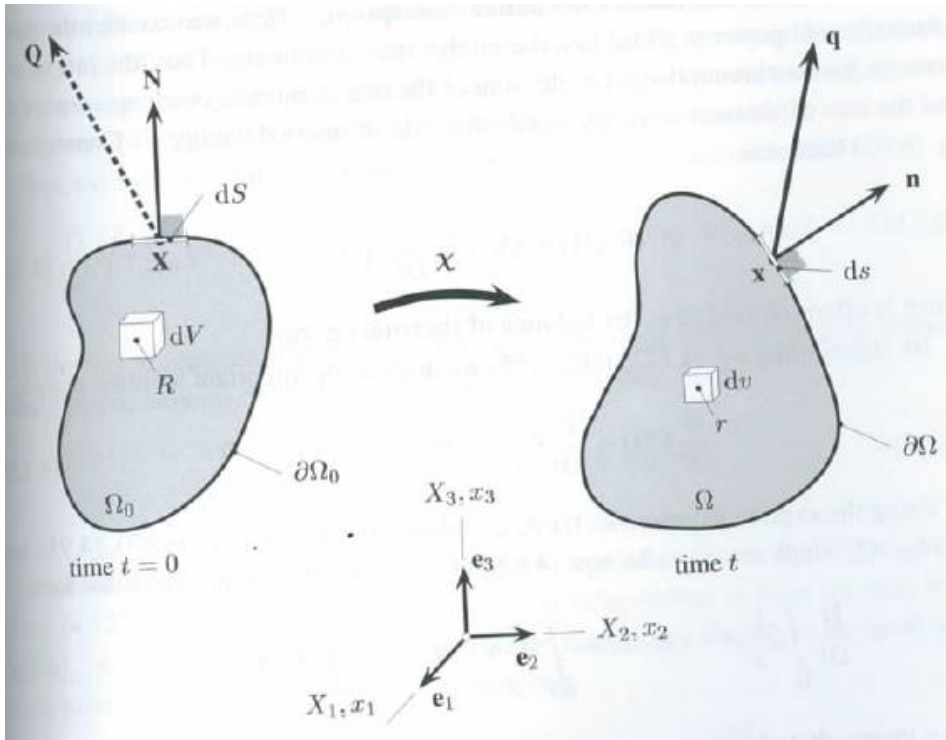
- Mechanická i tepelná energie
- Bilance celkové energie
- Bilance entropie

- Stavové veličiny - závisí na poloze a času – př.: šest složek přetvoření a teplota
- Stavové funkce popisují stavové veličiny
- Stavové rovnice (konstitutivní rovnice) popisují vztahy mezi stavovými veličinami
př.: Hookeův zákon

- Termodynamický proces – přechod mezi jednotlivými termodynamickými stavy
- Cyklus = počáteční a konečný stav jsou totožné

- Rovnovážný stav (rovnoměrná teplota a nulová rychlost)
- Nerovnovážný stav (gradient teploty a rychlosti)
- Termodynamická rovnováha
- Kvazistatický (kvazirovnovážný) proces

- Teplo – forma tepelné energie, která je přenášena mezi systémy v důsledku teplotních gradientů



Stokesův teorém tepelného toku

$$q_n(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = -\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}, \quad [\text{Wm}^{-2}]$$

$$Q_n(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) = -\mathbf{Q}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{N},$$

Tepelný tok v prostorovém a materiálovém popisu (za jednotku času na jednotku plochy):

$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ Cauchy (skutečný) tepelný tok $[\text{Wm}^{-2}]$,

$\mathbf{Q}(\mathbf{X}, t)$ Piola-Kirchhoff (nominální) tepelný tok

$$\int_{\partial\Omega_0} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} dS = \int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{q} \cdot \mathbf{J}\mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dS =$$

$$= \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1} \mathbf{q} \cdot \mathbf{N} dS \Rightarrow \mathbf{Q} = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1} \mathbf{q}.$$

$$(Nanson : ds = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-T} dS)$$

Tepelný výkon:

$$\mathcal{Q}(t) = \int_{\partial\Omega} q_n ds + \int_{\Omega} r dv = \int_{\partial\Omega_0} Q_n dS + \int_{\Omega_0} R dV.$$

kde $r(\mathbf{x}, t)$ a $R(\mathbf{X}, t)$ $[\text{Wm}^{-3}]$ jsou zdroje tepla

za jednotku času na jednotku objemu,

$$\int_{\Omega} r dv \text{ a } \int_{\Omega} R dV \text{ je rychlost generování tepla}$$

První zákon termodynamiky v prostorovém popisu

Připomeňme zákon o zachování mechanické energie:

$$\mathcal{K}(t) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 dv,$$

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(t) = \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{d} dv, \quad \mathcal{P}_{\text{int}}(t) = \frac{D}{Dt} \mathcal{U}(t), \quad \mathcal{U}(t) = \int_{\Omega} u dv,$$

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(t) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} ds,$$

$$\frac{D}{Dt} \mathcal{K}(t) + \mathcal{P}_{\text{int}}(t) = \mathcal{P}_{\text{ext}}(t), \quad \frac{D}{Dt} \mathcal{K}(t) + \frac{D}{Dt} \mathcal{U}(t) = \mathcal{P}_{\text{ext}}(t).$$

Do bilance přidáme tepelný výkon: $\mathcal{Q}(t) = \int_{\partial\Omega} q_n ds + \int_{\Omega} r dv = \int_{\Omega} (-\text{div} \mathbf{q} + r) dv.$

Časový přírůstek vnitřní energie $\mathcal{U}(t)$ je roven součtu výkonu vnitřních sil a tepelného výkonu = **bilance tepelné energie**:

$$\frac{D}{Dt} \mathcal{U}(t) = \mathcal{P}_{\text{int}}(t) + \mathcal{Q}(t).$$

$$\frac{D}{Dt} \mathcal{U}(t) = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} u dv = \int_{\Omega} (\underline{\sigma} : \underline{d} - \text{div} \mathbf{q} + r) dv \Rightarrow$$

$$\dot{u} = \underline{\sigma} : \underline{d} - \text{div} \mathbf{q} + r.$$

Dosadíme do bilance celkové energie a dostáváme důležitou identitu:

Časový přírůstek celkové energie (kinetické plus vnitřní) termodynamického systému se rovná součtu mechanického výkonu vnějších sil a tepelného výkonu:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \mathcal{K}(t) + \frac{D}{Dt} \mathcal{U}(t) &= \mathcal{P}_{ext}(t) + \mathcal{Q}(t) \Rightarrow \\ \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + u \right) dv &= \int_{\Omega} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + r) dv + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} + q_n) ds. \end{aligned}$$

První zákon termodynamiky v materiálovém popisu

$$\mathcal{U}(t) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\Omega_0} u(\chi(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) dV = \int_{\Omega_0} u_M(\mathbf{X}, t) dV,$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_0} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{V}^2 + u_M \right) dV = \int_{\Omega_0} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{V} + R) dV + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{V} + Q_N) dS.$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_0} u_M dV = \int_{\Omega_0} \dot{u}_M dV = \int_{\Omega_0} (\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - Div \mathbf{Q} + R) dV,$$

$$\dot{u}_M = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - Div \mathbf{Q} + R.$$

Duhamelův zákon vedení tepla:

$\underline{\kappa}(\mathbf{F}, \theta)$ a $\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{F}, \theta)$ [$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$] jsou tenzory tepelné vodivosti v prostorovém a materiálovém popisu, $\theta(\mathbf{x}, t)$ = absolutní teplota [K]

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -\underline{\kappa}(\mathbf{F}, \theta) \text{grad}\theta(\mathbf{x}, t),$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{X}, t) = -\underline{\mathbf{F}}^{-1} \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{F}, \theta) \underline{\mathbf{F}}^{-T} \text{Grad}\theta(\mathbf{X}, t),$$

$$\left(\text{Piola transf. : } \mathbf{Q} = J \underline{\mathbf{F}}^{-1} \mathbf{q}, \quad \text{Grad}\theta = \underline{\mathbf{F}}^T \text{grad}\theta, \quad \underline{\mathbf{K}} = J \underline{\kappa} \right).$$

Pokud je materiál izotropní, dostáváme **Fourierův zákon**:

$$\underline{\kappa} = k(\mathbf{F}, \theta) \mathbf{I}, \quad k \geq 0, \quad \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{F}, \theta) = Jk \geq 0,$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -k \text{grad}\theta(\mathbf{x}, t),$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{X}, t) = -K \underline{\mathbf{F}}^{-1} \underline{\mathbf{F}}^{-T} \text{Grad}\theta(\mathbf{X}, t) = -K \underline{\mathbf{C}}^{-1} \text{Grad}\theta.$$

k a K [$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$] jsou koeficienty tepelné vodivosti, obecně jsou závislé na teplotě a na deformaci, jsou nezáporné, což znamená, že teplo teče ve směru klesající teploty.

Entropie – princip nerovnosti

Teplo teče z teplejší do chladnější oblasti a pokud je mechanická energie přeměněna na teplo třením, není tento proces vratný.

Entropie je základní stavovou veličinou – míra nahodilosti a neuspořádanosti.

Zavedme hustotu entropie na jednotku objemu v prostorové a materiálové konfiguraci:

$$\eta_c = \eta_c(\mathbf{x}, t), \quad \eta = \eta(\mathbf{X}, t),$$

$$S(t) = \int_{\Omega} \eta_c(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\Omega_0} \eta(\mathbf{X}, t) dV, \quad \text{kde } \eta(\mathbf{X}, t) = J(\mathbf{X}, t) \eta_c(\mathbf{x}, t).$$

Rychlost růstu entropie v nějaké oblasti kontinua se skládá z entropie přitékající hraniční plochou a z entropie vznikající uvnitř oblasti:

$$\dot{Q}(t) = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Omega} \tilde{r} dv = - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{H} \cdot \mathbf{N} dS + \int_{\Omega} \tilde{R} dv,$$

kde $\tilde{r}(\mathbf{x}, t)$, $\tilde{R}(\mathbf{X}, t)$ a $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{H}(\mathbf{X}, t)$

skalární funkce r a R jsou zdroje entropie za jednotku času na jednotku objemu a vektorové funkce \mathbf{h} a \mathbf{H} jsou toky entropie na jednotku plochy, \mathbf{n} a \mathbf{N} jsou vnější normály v prostorovém a materiálovém popisu

Druhý zákon termodynamiky

Celková produkce entropie $\Gamma(t)$ za jednotku času je rovna rozdílu mezi rychlostí změny entropie \dot{S} a rychlostí růstu entropie \tilde{Q} v oblasti.

Druhý zákon termodynamiky – princip nerovnosti entropie: celková produkce entropie $\Gamma(t)$ za jednotku času není nikdy negativní.

$$\Gamma(t) = \frac{D}{Dt} S(t) - \tilde{Q}(t) \geq 0,$$

$$\Gamma(t) = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \eta_c(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\Omega} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} \tilde{r} dv \geq 0.$$

Termodynamický proces, při kterém $\Gamma=0$, je vratný (idealizace). Reálné procesy jsou nevratné.

Clausiusova – Duhemova nerovnost

$$\Gamma(t) = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \eta_c(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{q}}{\Theta} \cdot \mathbf{n} ds - \int_{\Omega} \frac{r}{\Theta} dv \geq 0,$$

$$\Gamma(t) = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_0} \eta(\mathbf{X}, t) dV + \int_{\partial\Omega_0} \frac{\mathbf{Q}}{\Theta} \cdot \mathbf{N} dS - \int_{\Omega_0} \frac{R}{\Theta} dV \geq 0,$$

kde $r(\mathbf{x}, t)$ a $R(\mathbf{X}, t)$ jsou zdroje tepla za jednotku času na jednotku objemu,

$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ a $\mathbf{Q}(\mathbf{X}, t)$ jsou tepelné toky za jednotku času na jednotku plochy

a $\Theta(\mathbf{x}, t)$ je absolutní teplota.

Clausiusova – Duhemova nerovnost: lokální tvar

Převedení integrálu přes povrch na integrál přes objem a dosazení:

$$\int_{\partial\Omega_0} \frac{\mathbf{Q}}{\Theta} \cdot \mathbf{N} dS = \int_{\Omega_0} \text{Div} \left(\frac{\mathbf{Q}}{\Theta} \right) dV = \int_{\Omega_0} \left(\frac{1}{\Theta} \text{Div} \mathbf{Q} - \frac{1}{\Theta^2} \mathbf{Q} \cdot \text{Grad} \Theta \right) dV$$

$$\dot{\eta} - \frac{R}{\Theta} + \left(\frac{1}{\Theta} \text{Div} \mathbf{Q} - \frac{1}{\Theta^2} \mathbf{Q} \cdot \text{Grad} \Theta \right) \geq 0, \quad \text{dosadíme za } R \text{ z 1. zák. : } \dot{u}_M = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \text{Div} \mathbf{Q} + R$$

$$\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \dot{u}_M + \dot{\eta} \Theta - \frac{1}{\Theta} \mathbf{Q} \cdot \text{Grad} \Theta \geq 0, \quad \text{kde člen } -\frac{1}{\Theta} \mathbf{Q} \cdot \text{Grad} \Theta \geq 0 \text{ značí produkci entropie}$$

v důsledku vedení tepla \Rightarrow **Clausiova-Planckova nerovnost** :

$\mathcal{D}_{\text{int}} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \dot{u}_M + \dot{\eta} \Theta \geq 0$, kde $\mathcal{D}_{\text{int}} \geq 0$ je vnitřní disipace neboli lokální produkce entropie, která musí být nezáporná v každé částici tělesa a vždy.

Lokální tvar bilance energie v 1. zák.termod. $\dot{u}_M = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \text{Div} \mathbf{Q} + R$ lze přepsat pomocí Clausiovy-Planckovy nerovnosti :

$$\dot{\eta} \Theta = -\text{Div} \mathbf{Q} + \mathcal{D}_{\text{int}} + R.$$

Typy termodynamických procesů

Adiabatický proces: tepelný tok q povrchem tělesa a zdroje tepla r v tělese jsou nulové. Tepelný výkon je tedy roven 0 a rovněž časový přítok entropie je nulový. Druhý zákon termodynamiky je tedy $\Gamma = \dot{S} \geq 0$, to znamená, že celková energie v adiabatickém procesu nepoklesne.

Bilance energie degenerovala na: $\dot{\eta}^{\Theta} = \mathcal{D}_{\text{int}}$.

Je-li navíc adiabatický proces vratný, pak produkce entropie je nulová a $\dot{\eta}^{\Theta} = \mathcal{D}_{\text{int}} = 0$.

Izotermický proces: absolutní teplota $\theta = \text{konst}$ během celého procesu

Izentropický proces: entropie je konstantní $S = \text{konst}$