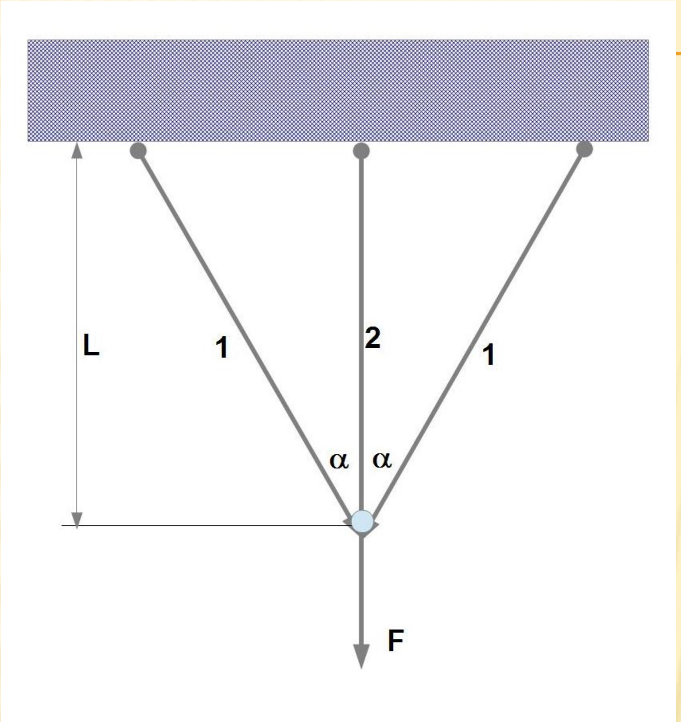
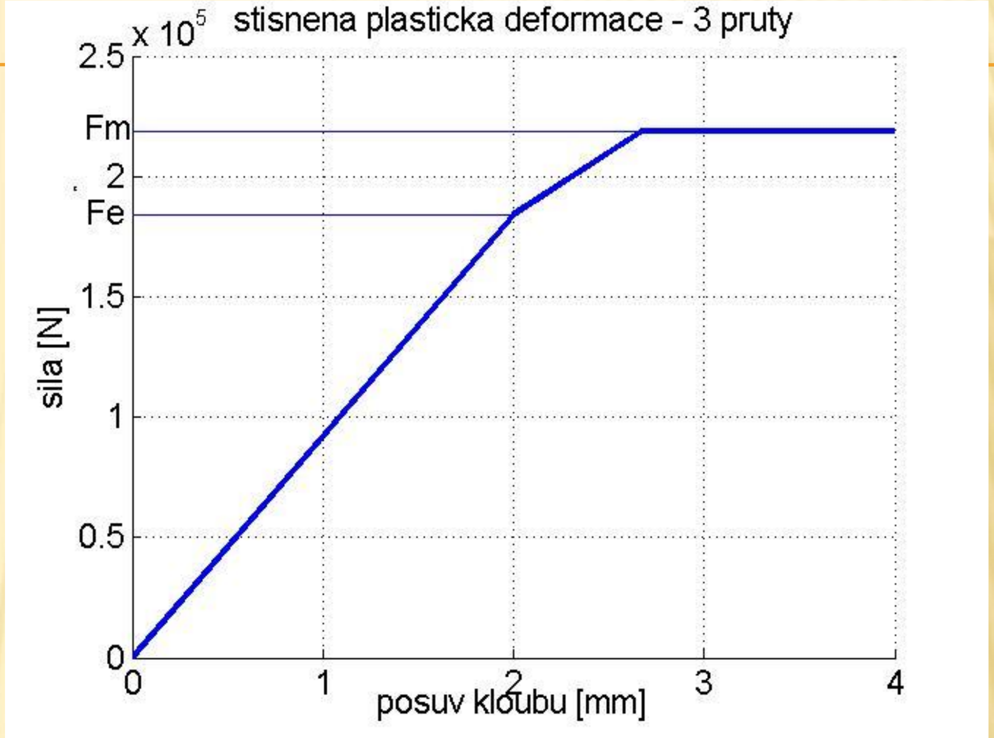
Stísněná plastická deformace

PLASTICITA

STÍSNĚNÁ PLASTICKÁ DEFORMACE VE STATICKY NEURČITÝCH ÚLOHÁCH





Elastické řešení: $N_2 = F \big/ \left(1 + 2\cos^3 \alpha\right)$, $N_1 = N_2 \cos^2 \alpha$.

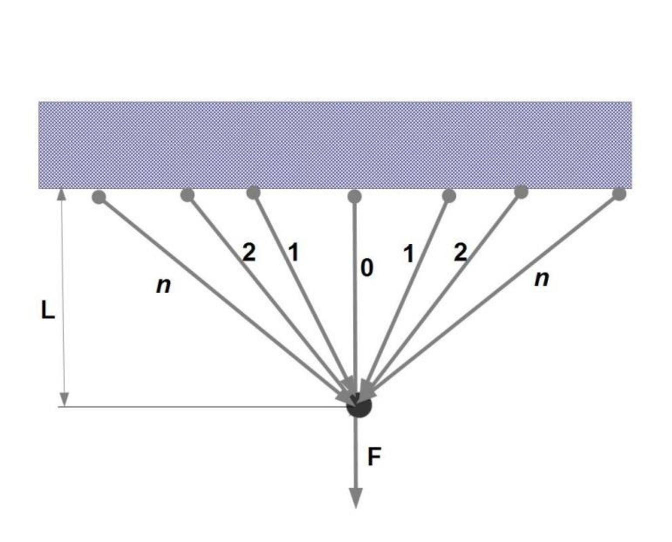
Největší síla, kterou může prut přenést: $N_u = \sigma_k S$. Prut 2 přejde do plast. stavu první

při zatěž.síle $F_e = N_u \left(1 + 2\cos^3 \alpha\right)$, tomu odpovídá posuv kloubu $\Delta_e = \dfrac{N_u L}{ES}$, dále je posuv

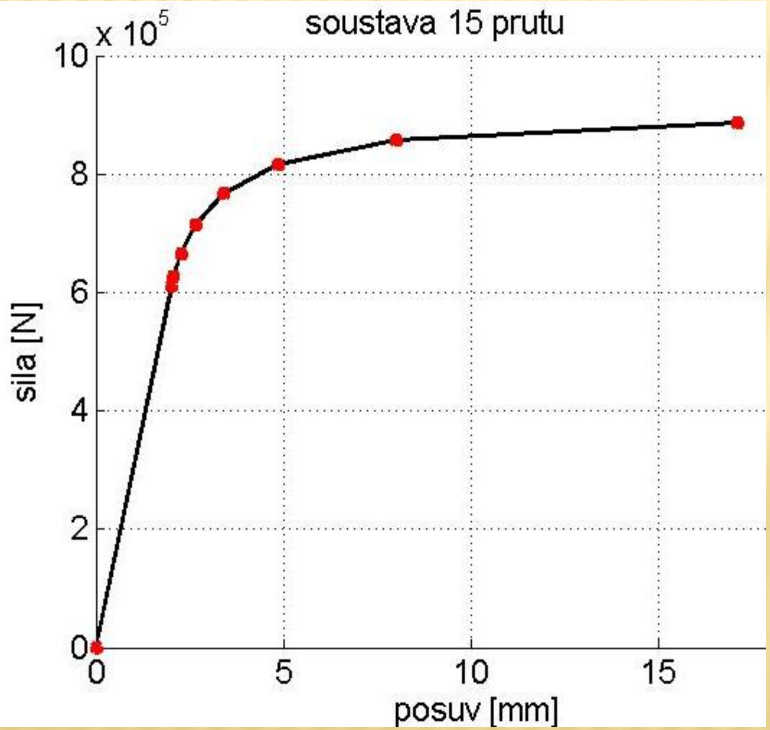
kloubu dán elastickou deformací prutů 1, která určuje a omezuje plastickou deformaci prutu 2.

Meznou sílu určíme z podmínky rovnováhy: $F_m = N_u \left(1 + 2\cos \alpha\right)$ a odpovídající posuv $\Delta_m = \dfrac{\Delta_e}{\cos^2 \alpha}$.

HRANICE MEZI ELASTICKOU A PLASTICKOU OBLASTÍ



Prutová soustava má 15 prutů (n=7), modul pružnosti E a plocha průřezu S a mez kluzu σ_Y jsou stejné pro všechny pruty, α_k je úhel prutu. Při zvyšování síly F dosáhne napětí ve středním prutu meze kluzu, ostatní pruty jsou v elastickém stavu a jejich deformace bude určovat (a omezovat) plastickou deformaci ve středním prutu. Při dalším zvyšování síly F se plastická oblast bude rozšiřovat na další pruty, až postupně zasáhne celou konstrukci. Tento proces budeme sledovat:



Podmínka rovnováhy: $N_0 + 2\sum_{k=1}^{n} N_k \cos\alpha_k = F,$

Podm.deformační: $\dfrac{\Delta_k}{\cos\alpha_k} = \delta, \delta =$ posuv kloubu,

$\Delta_k = \dfrac{N_k L}{ES\cos\alpha_k} =$ prodloužení prutu k.

V elastickém stavu $\delta = \dfrac{N_0 L}{ES} \Rightarrow N_k = N_0 \cos^2\alpha_k \Rightarrow$

$F = N_0(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos^3\alpha_k).$

Označme $N_u = \sigma_Y S$ (max síla v prutu), pak prut 0 přejde do plast. stavu při zatěžující síle

$F_0 = N_u(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos^3\alpha_k) \sim \delta_0 = \dfrac{N_0 L}{ES} = \dfrac{N_u L}{ES}.$

HRANICE MEZI ELASTICKOU A PLASTICKOU OBLASTÍ

Prut 0 je v plastickém stavu $N_0 = N_u$, ostatní pruty jsou ve stavu elastickém. Podmínka rovnováhy:

$N_u + 2\sum_{k=1}^{n} N_k \cos\alpha_k = F,$ prodloužení prutu 0 je dáno prodloužením ostatních prutů.

Další na řadě pro přechod do plast. stavu je prut 1. Do def. podmínky dosadíme za

$$\delta = \frac{\Delta_1}{\cos\alpha_1} = \frac{N_1 L}{ES\cos^2\alpha_1} \Rightarrow \frac{N_k L}{ES\cos^2\alpha_k} = \frac{N_1 L}{ES\cos^2\alpha_1} \Rightarrow N_k = N_1\frac{\cos^2\alpha_k}{\cos^2\alpha_1} \Rightarrow$$

$$F = N_u + \frac{2N_1}{\cos^2\alpha_1}\sum_{k=1}^{n}\cos^3\alpha_k \Rightarrow F_1 = N_u(1 + 2\cos\alpha_1 + \frac{2}{\cos^2\alpha_1}\sum_{k=2}^{n}\cos^3\alpha_k) \approx \delta_1 = \frac{N_u L}{ES\cos^2\alpha_1}.$$

Takto dostaneme posloupnost sil a posuvů, které ohraničují jednotlivé pruž.-plast. oblasti:

$F_j = N_u(1 + 2\sum_{k=1}^{j}\cos\alpha_k + \frac{2}{\cos^2\alpha_j}\sum_{k=j+1}^{n}\cos^3\alpha_k) \approx \delta_j = \frac{N_u L}{ES\cos^2\alpha_j}$ viz červené body v grafu δ-F.

Mezní síla bude: $F_m = N_u(1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos\alpha_k) \approx \delta_m = \frac{N_u L}{ES\cos^2\alpha_n}.$

V každém kroku mezery mezi pruty v plastickém a elastickém stavu tvoří pomyslnou elasto-plastickou hranici. Když se zatěžující síla zvýší, další dvojice prutů se dostane do plast. stavu a hranice se posune do další mezery. Takto jednoduše lze hranici identifikovat a analyticky popsat pouze v jednoduchých úlohách.

Ve složitějších případech je elasto-plastická hranice neznámou veličinou a může být určena pouze metodou pokus-omyl, krok za krokem v průběhu inkrementálního řešení. Zatížení je rozloženo na malé kroky a výpočet je iterativní.

PŘÍPUSTNÉ ZATÍŽENÍ PODLE DOVOLENÝCH NAPĚTÍ A Z MEZNÉHO STAVU KONSTRUKCE

V elastickém stavu přenáší největší část zatížení prut 0.

$$F = N_0 (1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos^3 \alpha_k), \text{podle dovoleného napětí : } N_0 \le \sigma_{DOV} S$$

$$\Rightarrow F^{*}_{DOV} = \sigma_{DOV} S \,(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos^3 \alpha_k) \approx \left(\sigma_k / n^{*}\right) S \,(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos^3 \alpha_k).$$

Při návrhu z mezného stavu vycházíme z mezné síly:

$$F_m = \sigma_k S (1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos \alpha_k) \quad \Rightarrow F^{**}_{DOV} = \frac{F_m}{n^{**}}.$$

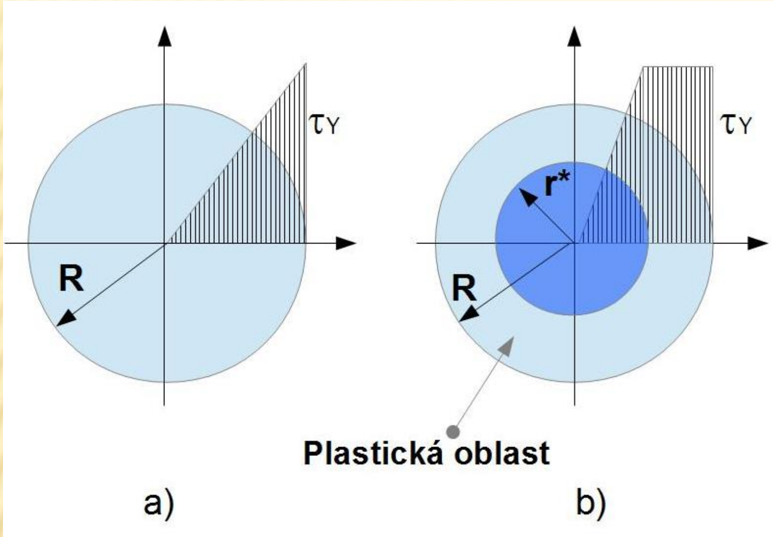
Pokud v našem příkladu budeme předpokládat stejný koeficient bezpečnosti:

$$n^{*} = n^{**}, \text{ pak bude poměr } \frac{F^{**}_{DOV}}{F^{*}_{DOV}} = \frac{(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos \alpha_k)}{(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos^3 \alpha_k)} \approx 1{,}4527.$$

$\Rightarrow$ Zvolíme-li bezpečnost proti meznému stavu $n^{**} = 1{,}5$

budou při zatížení $F = F_m / n^{**}$ všechny pruty v elastickém stavu.

PRUŽNĚ-PLASTICKÝ KRUT



V elastickém stavu je smykové napětí v kruhovém průřezu lineární funkcí poloměru. Plastická oblast se začne šířit od okraje průřezu.
Deformace tyče bude řízena pružnou oblastí, která omezuje plastickou deformaci v plastické části průřezu.

$a)$Moment přenášený v okamžiku, kdy smykové napětí na okraji průřezu

dostoupí meze kluzu τ_k : $\quad M_{el} = \tau_k W_k\left(R\right) = \tau_k \pi R^3/2, \quad \theta_{el} = \dfrac{M_{el}}{GJ_p} = \dfrac{\tau_k}{GR}$

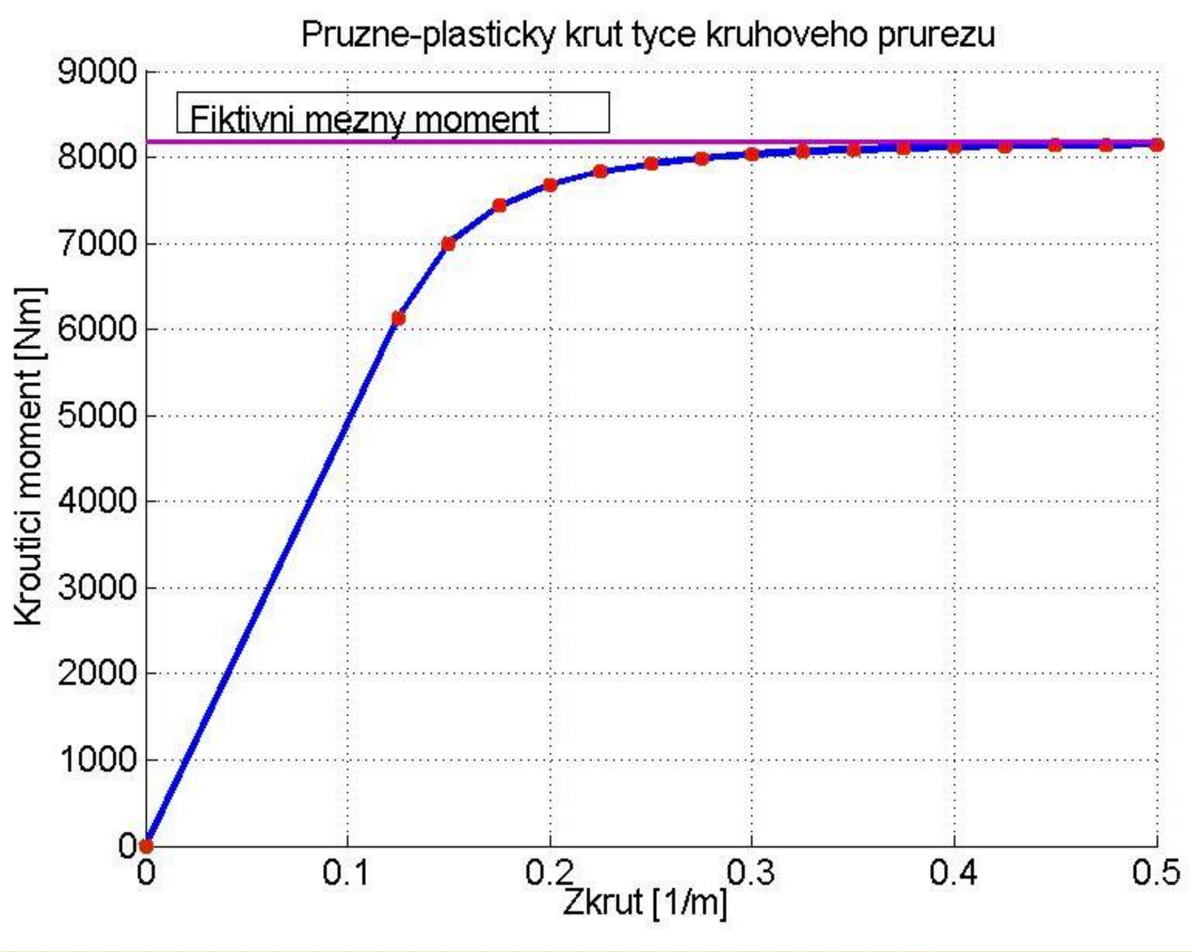
$b)$ Moment a zkrut v elasto-plastickém stavu:

$$M_{el-pl} = \tau_k W_k\left(r^*\right) + \int_0^{2\pi}\int_{r^*}^{R} \tau_k r^2 dr d\varphi = \tau_k\left[\pi r^{*3}/2 + 2\pi\left(R^3 - r^{*3}\right)/3\right], \theta_{el-pl} = \frac{\tau_k W_k\left(r^*\right)}{GJ_p\left(r^*\right)} = \frac{\tau_k}{Gr^*}.$$

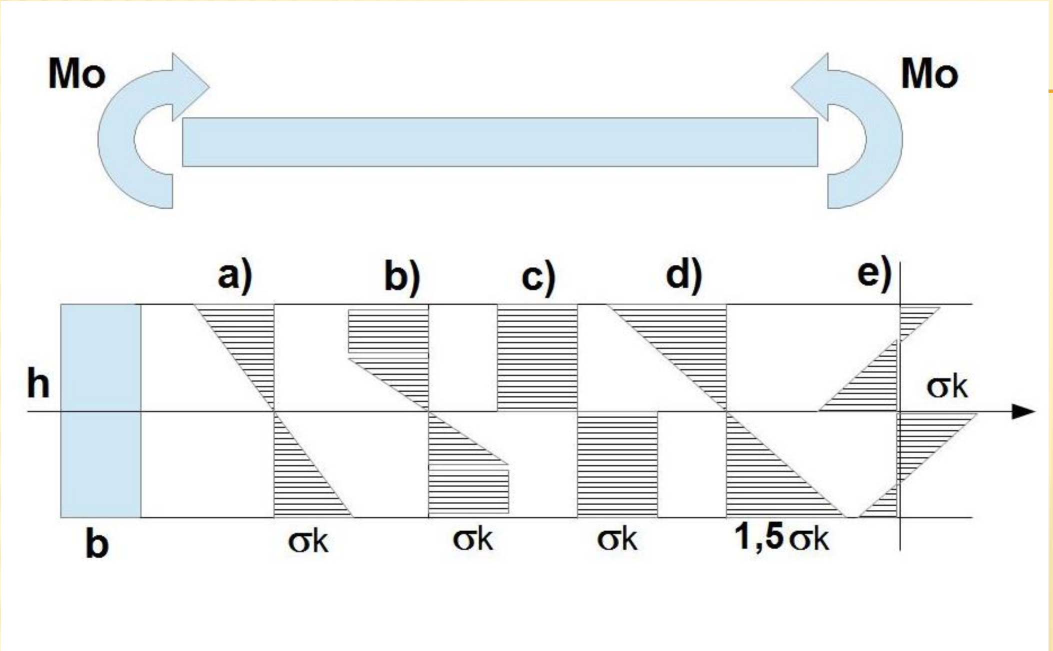
Mezný moment, kdy celý průřez by byl v plastickém stavu: $M_{Mez} = 2\pi R^3/3.$

$$M_{el-pl} = M_{Mez}\left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{r^*}{R}\right)^3\right] = M_{Mez}\left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\theta_{el}}{\theta_{el-pl}}\right)^3\right].$$

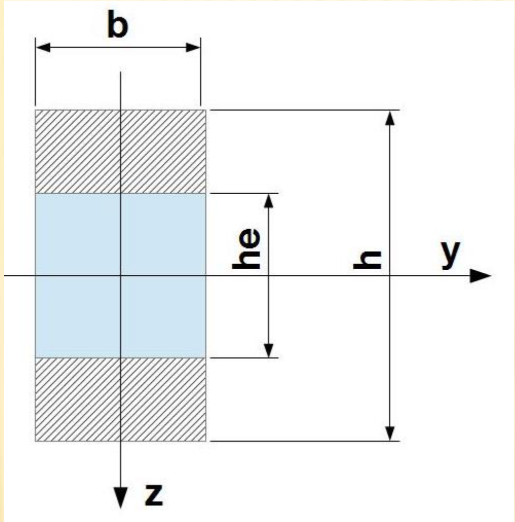
PRUŽNĚ – PLASTICKÝ KRUT



PRUŽNĚ-PLASTICKÝ OHYB



Prizmatická tyč obdélníkového průřezu je zatížená ohybovým momentem. Materiál je ideálné pružně plastický bez zpevnění.



Při zvyšování ohybového momentu bude průřez postupně přecházet do plastického stavu.
a) Nejprve dosáhne meze kluzu napětí na okraji průřezu při momentu M_1 :

$$M_1 = \sigma_k \frac{bh^2}{6}, \text{ tomu odpovídá křivost } \kappa_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{M_1}{E\,bh^3/12} = \frac{2\sigma_k}{Eh}.$$

$$\text{b)střed průřezu h}_e \text{ je elastický: } M_{el-pl} = \sigma_k \left(bh_e^2/6 + b\left(h^2 - h_e^2\right)/4 \right), \quad \kappa_{el-pl} = \frac{M_e}{EJ_{ye}} = \frac{\sigma_k bh_e^2/6}{E\,bh_e^3/12} = \frac{2\sigma_k}{Eh_e}.$$

$$c\text{)celý průřez je v plastickém stavu: } M_{pl} = \sigma_k \frac{bh^2}{4} \quad \text{(z momentové podmínky rovnováhy)}$$

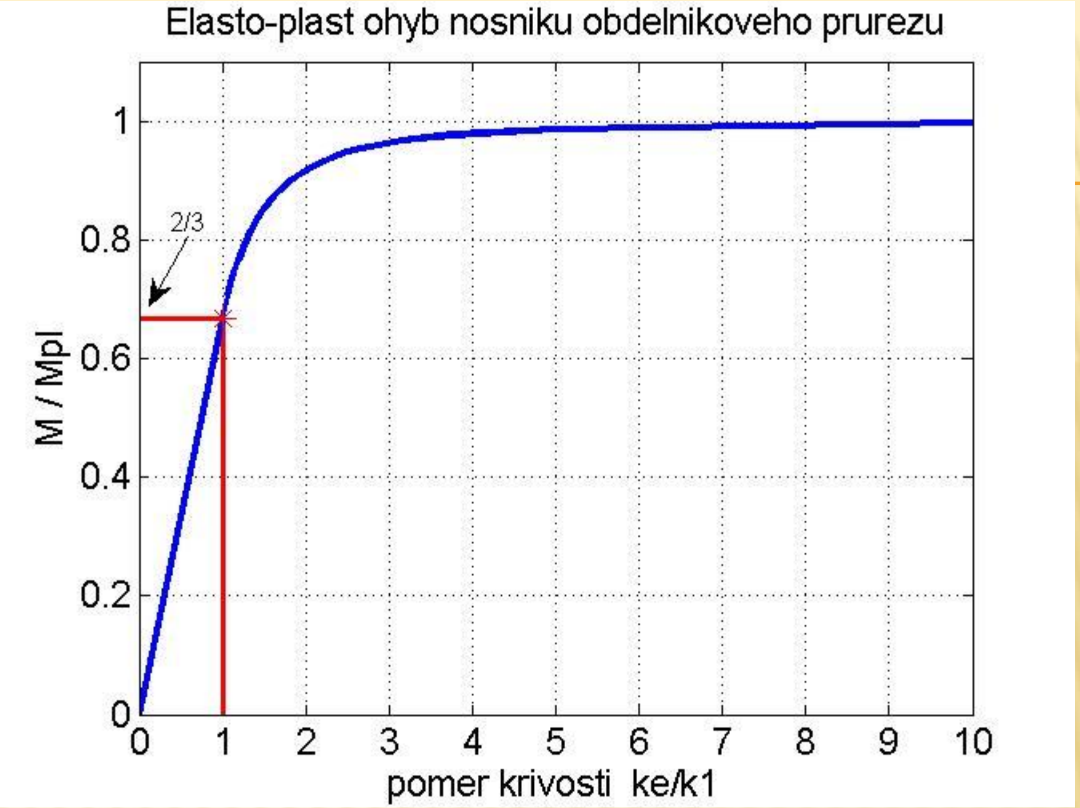
PRUŽNĚ-PLASTICKÝ OHYB

Upravíme vztah pro M_{el-pl} :

$$M_{el-pl} = \left(\sigma_k\, bh^2/4\right)\left(1-\left(h_e/h\right)^2/3\right) =$$

$$= M_{pl}\left(1-\frac{1}{3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_{el-pl}}\right)^2\right) \Rightarrow$$

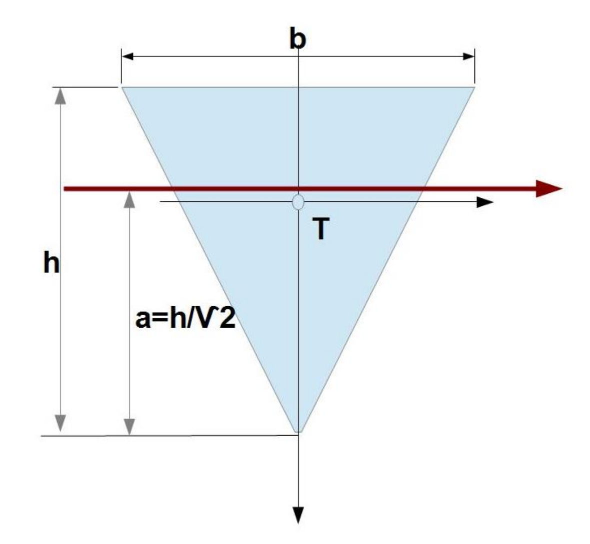
$$\frac{M_{el-pl}}{M_{pl}} = 1-\frac{1}{3}\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_{el-pl}}\right)^2.$$



Předpokládejme, že tyč zatížíme mezním momentem M_{pl} a odlehčíme. Určíme zbytková napětí v tyči. Kdyby byla tyč v elastickém stavu i při zatížení M_{pl} bylo by v ní napětí znázorněné na obr. d) Zbytková napětí jsou na obrázku e) vypočteme je tak, že od napětí c) odečteme napětí d) :

$$\sigma_{zb}(z) = sign(z)\sigma_k - \frac{M_{pl}}{J_y} z = \sigma_k\left(sign(z) - 3\frac{z}{h}\right).$$

PRŮŘEZY S JEDNOU OSOU SYMETRIE



U průřezů, které nejsou symetrické vzhledem k ose y se neutrálná osa posouvá mimo těžiště při přechodu do plastického stavu. Při dosažení mezného ohybového momentu bude neutrálná osa půlit plochu průřezu, neboť musí platit podmínka rovnováhy do směru osy tyče (napětí nad i pod neutrálnou osou jsou rovna σ_k, ale mají opačný smysl). Plastický moment je tedy roven násobku napětí na mezi kluzu σ_k krát polovina plochy průřezu krát vzdálenost mezi těžišti horní a dolní poloviny plochy průřezu.

Pro rovnoramenný trojúhelník vypočtěte ohybový moment, při kterém započne elasto-plastický stav v průřezu a mezný ohybový moment. Stanovte součinitel plastičnosti průřezu. Neutrálná osa leží ve vzdálenosti *a* od vrcholu trojúhelníka – viz obrázek.

$$a = h\sqrt{2}/2, \quad J_y = \frac{bh^3}{36}, \quad M_1 = \sigma_k \frac{bh^2}{24}, \quad M_{pl} = \sigma_k 0{,}0976 bh^2, \quad \xi_{pl} = 2{,}34.$$