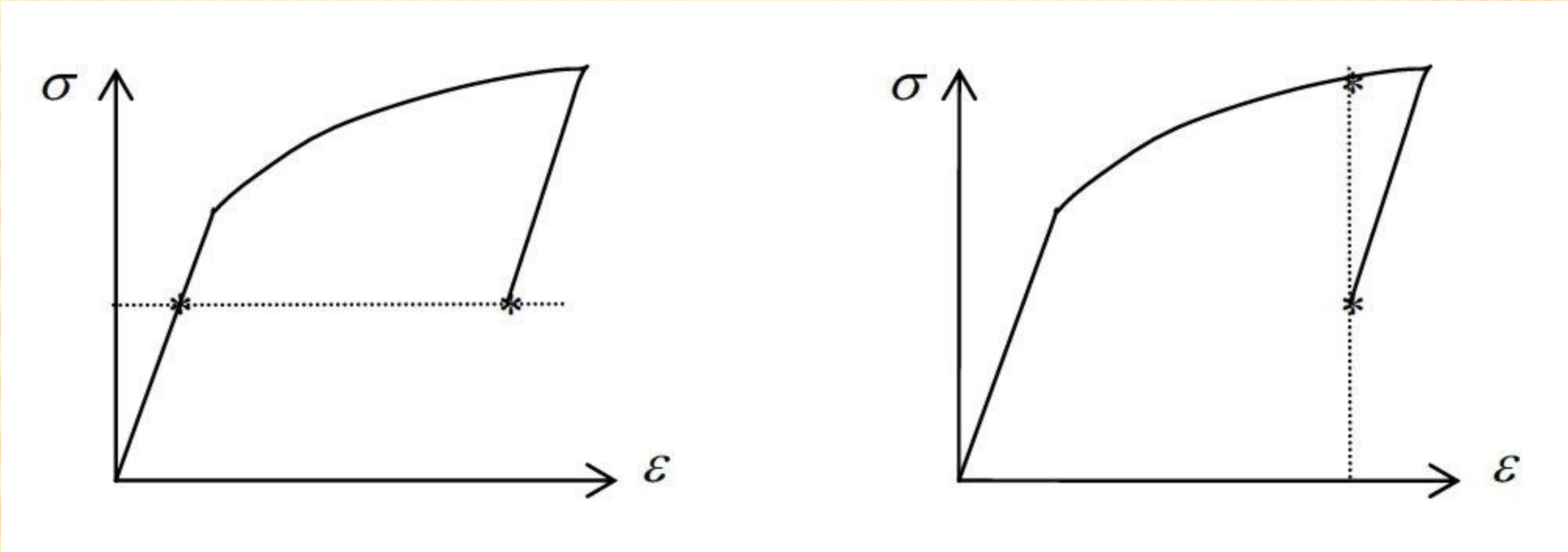
Teorie plasticity

PLASTICITA

TEORIE PLASTICKÉHO TEČENÍ – IDEÁLNĚ PRUŽNĚ-PLASTICKÝ MATERIÁL BEZ ZPEVNĚNÍ



V plastickém stavu nelze jednoznačně přiřadit k danému napětí jediné přetvoření a naopak, jak tomu bylo ve stavu elastickém. V plastické oblasti pracujeme s přírůstky napětí dσ a přírůstky přetvoření dε a se vztahy mezi nimi. Tyto vztahy mezi přírůstky napětí a přírůstky přetvoření vyplynou z teorií plastického tečení. Celkové přetvoření dostaneme součtem (integrací) jednotlivých přírůstků.

PRANDTLOVY-REUSSOVY ROVNICE – INKREMENTÁLNÍ TEORIE PLASTICITY

- Přírůstek deformace je rozdělen na elastickou a plastickou část: $d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p,$
- Materiál je izotropní a ideálně pružně-plastický (bez zpevnění). Předpokládáme, že přírůstky **hlavních** plastických přetvoření jsou úměrné **hlavním** složkám deviátoru napětí:

$$\frac{d\varepsilon_1^p}{s_1} = \frac{d\varepsilon_2^p}{s_2} = \frac{d\varepsilon_3^p}{s_3} = d\lambda \geq 0, \qquad d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p = 0,$$

- kde kladná hodnota dλ závisí na podmínce plasticity a plastická deformace probíhá při konstantním objemu.
- Rovnice můžeme zapsat v obecných souřadnicích :

$$\frac{d\varepsilon_{xx}^p}{s_{xx}} = \frac{d\varepsilon_{yy}^p}{s_{yy}} = \frac{d\varepsilon_{zz}^p}{s_{zz}} = \frac{d\varepsilon_{xy}^p}{s_{xy}} = \frac{d\varepsilon_{yz}^p}{s_{yz}} = \frac{d\varepsilon_{zx}^p}{s_{zx}} = d\lambda, \quad \Rightarrow d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda\, s_{ij}, \text{ nebo také:}$$

$$\frac{d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{yy}^p}{s_{xx} - s_{yy}} = \frac{d\varepsilon_{yy}^p - d\varepsilon_{zz}^p}{s_{yy} - s_{zz}} = \ldots.. \frac{d\varepsilon_{xx}^p - d\varepsilon_{yy}^p}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \frac{d\varepsilon_{yy}^p - d\varepsilon_{zz}^p}{\sigma_{yy} - \sigma_{zz}} = \ldots\ldots = d\lambda,$$

$$\text{nebo jako } \frac{\dot{\varepsilon}_{xx}^p - \dot{\varepsilon}_{yy}^p}{s_{xx} - s_{yy}} = \ldots. = \frac{\dot{\varepsilon}_{xx}^p - \dot{\varepsilon}_{yy}^p}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \ldots = \dot{\lambda}.$$

deviátor napětí: $\left[s_{ij}\right]=\begin{bmatrix} \sigma_{xx}-\sigma_m & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy}-\sigma_m & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}-\sigma_m \end{bmatrix},\ \sigma_m=\frac{1}{3}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right).$

Prandtlovy-Reussovy rovnice:

$$d\varepsilon_{xx}=d\varepsilon_{xx}^{e}+d\varepsilon_{xx}^{p}=\frac{1}{E}\left[d\sigma_{xx}-\nu\left(d\sigma_{yy}+d\sigma_{zz}\right)\right]+d\lambda\left[\sigma_{xx}-\sigma_m\right],$$

$$d\varepsilon_{yy}=\frac{1}{E}\left[d\sigma_{yy}-\nu\left(d\sigma_{xx}+d\sigma_{zz}\right)\right]+d\lambda\left[\sigma_{yy}-\sigma_m\right],$$

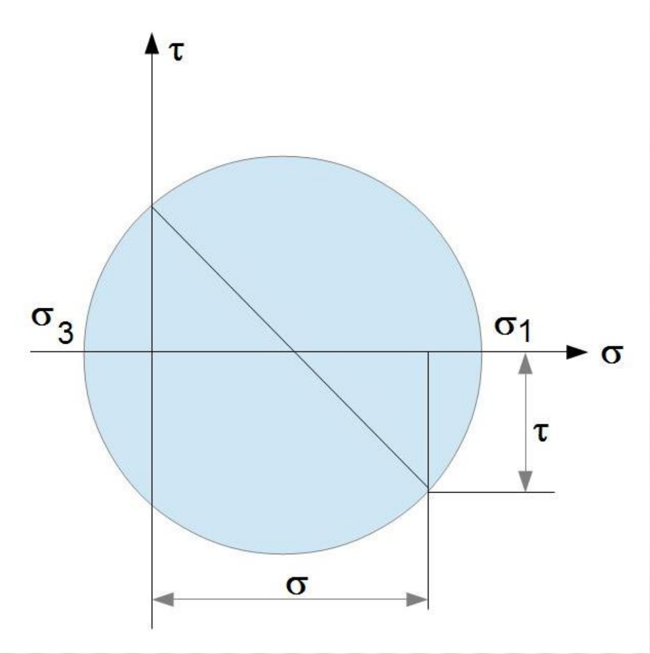
$$d\varepsilon_{zz}=\frac{1}{E}\left[d\sigma_{zz}-\nu\left(d\sigma_{xx}+d\sigma_{yy}\right)\right]+d\lambda\left[\sigma_{zz}-\sigma_m\right],$$

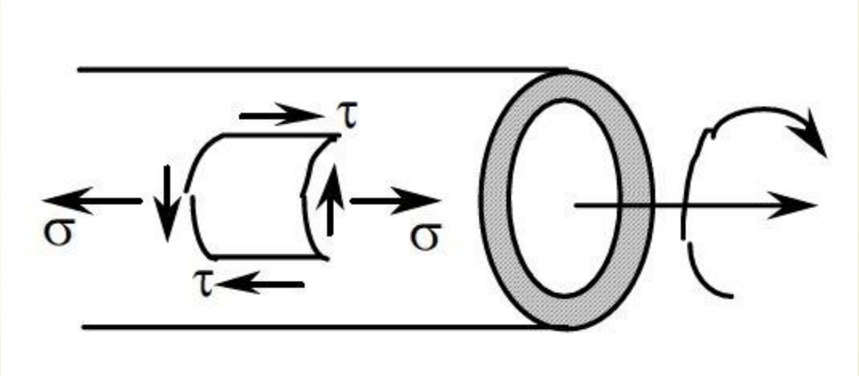
$$d\varepsilon_{xy}=\frac{1+\nu}{E}d\sigma_{xy}+d\lambda\,\sigma_{xy},\ d\varepsilon_{yz}=\frac{1+\nu}{E}d\sigma_{yz}+d\lambda\,\sigma_{yz},\ d\varepsilon_{xz}=\frac{1+\nu}{E}d\sigma_{xz}+d\lambda\,\sigma_{xz}.$$

Bez elastického členu jsou to rovnice Lévy-Misesovy.

APLIKACE NA EXPERIMENTY TAYLORA A QUINNEY

- kombinované zatížení tahovou silou a kroutícím momentem. Stěna trubky je ve stavu dvouosé napjatosti $\sigma_{xx}=\sigma$ a $\sigma_{xy}=\tau$, ostatní složky tenzoru napětí jsou nulové.





Hlavní napětí: $\sigma_2 = 0, \sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}.$

Tresca: $\sigma^2 + 4\tau^2 = \sigma_k^2 \quad \Rightarrow \left(\frac{\sigma}{\sigma_k}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\sigma_k/2}\right)^2 = 1$

Von Mises: $\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_k^2 \quad \Rightarrow \left(\frac{\sigma}{\sigma_k}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\sigma_k/\sqrt{3}}\right)^2 = 1$

- Materiál je ideálně pružně-plastický, mez kluzu v tahu je σ_k.
- Prandtlovy rovnice:

$$d\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} d\sigma_{xx} + d\lambda \frac{2}{3}\sigma_{xx},\ d\varepsilon_{yy} = d\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} d\sigma_{xx} - d\lambda \frac{1}{3}\sigma_{xx},$$

$$d\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{xy} + d\lambda\,\sigma_{xy}.$$

- Určíme závislost mezi poměrným prodloužením trubky ε_{xx} a tahovým napětím σ_{xx} v případu, kdy nejprve aplikujeme rostoucí kroutící moment až dosáhneme plastického stavu, pak zůstane moment konstantní a budeme zvyšovat tahovou sílu.
- V tom případě zůstane zkos ε_{xy} konstantní a $d\varepsilon_{xy}$ =0. Vyjádříme dλ z této rovnice a dosadíme do $d\varepsilon_{xx}$

$$0 = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{xy} + d\lambda\,\sigma_{xy} \quad \Rightarrow d\lambda = -\frac{1+\nu}{E}\frac{d\sigma_{xy}}{\sigma_{xy}},$$

$$d\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} d\sigma_{xx} - \frac{1+\nu}{E}\frac{d\sigma_{xy}}{\sigma_{xy}}\frac{2}{3}\sigma_{xx},$$

nebo: $$d\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} d\sigma - \frac{1+\nu}{E}\frac{d\tau}{\tau}\frac{2}{3}\sigma.$$

Podle Misesovy podmínky plasticity

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_k^2 \Rightarrow \tau = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\sigma_k^2 - \sigma^2}$$

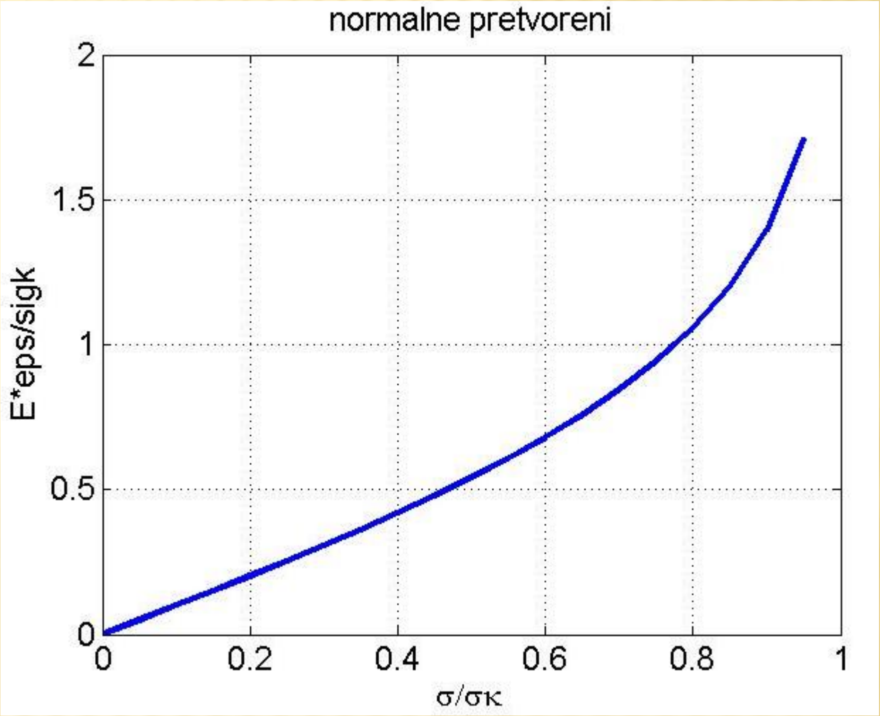
$$d\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} d\sigma + \frac{1+\nu}{E}\frac{2}{3}\frac{\sigma^2}{\sigma_k^2 - \sigma^2} d\sigma.$$

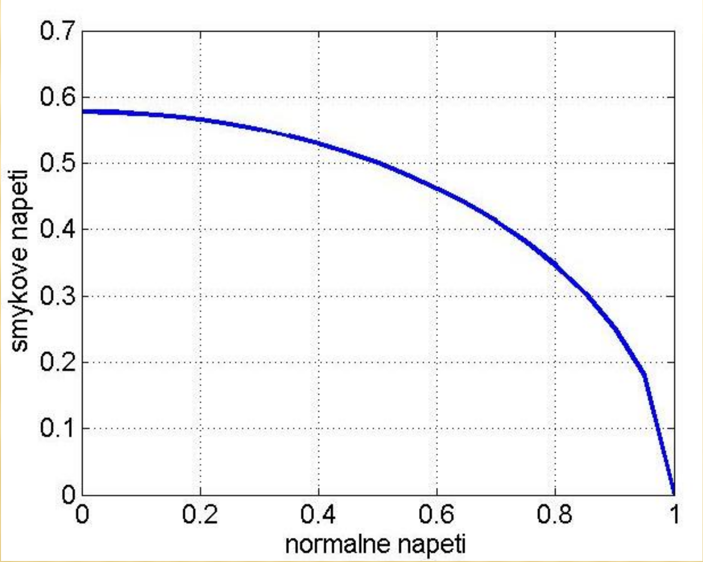
- Budeme integrovat výraz pro

$$d\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}d\sigma + \frac{1+\nu}{E}\frac{2}{3}\frac{\sigma^2}{\sigma_k^2 - \sigma^2}d\sigma, \qquad \int_0^s \frac{x^2}{a^2 - x^2}dx = \left[-x + \frac{a}{2}\ln\frac{a+x}{a-x}\right]_0^s$$

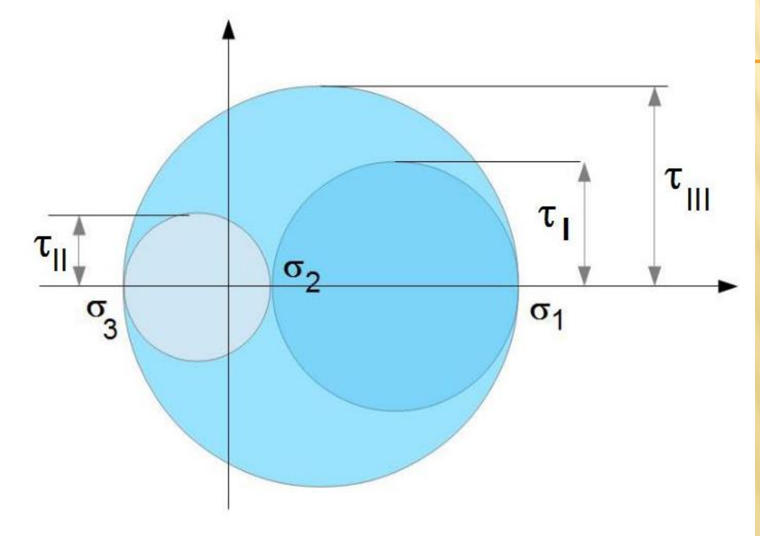
$$E\varepsilon_{xx} = \sigma + \frac{2}{3}(1+\nu)\left(-\sigma + \frac{\sigma_k}{2}\ln\frac{\sigma_k + \sigma}{\sigma_k - \sigma}\right),$$

$$\frac{E}{\sigma_k}\varepsilon_{xx} = \frac{1}{3}\left\{(1-2\nu)\frac{\sigma}{\sigma_k} + (1+\nu)\ln\left(\frac{1+\frac{\sigma}{\sigma_k}}{1-\frac{\sigma}{\sigma_k}}\right)\right\}.$$





TEORIE MALÝCH PRUŽNĚ PLASTICKÝCH DEFORMACÍ



Pět základních postulátů

- 1) Směry hlavních normálných napětí a směry hlavních přetvoření jsou shodné
- 2) Objem přetvářeného tělesa se mění pružně a střední přetvoření ε_s je úměrné střednímu napětí σ_s.
- 3) Největší smyková napětí jsou úměrná největším zkosům
- 4) Intenzita napětí je funkcí intenzity přetvoření
- 5) Odlehčení probíhá pružně

ad2) $\varepsilon_s = \alpha\sigma_s$, kde $\varepsilon_s = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$, $\sigma_s = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$. α určíme z 1-osé napjatosti:

$$\sigma_s = \frac{1}{3}\sigma_1,\ \varepsilon_s = \frac{1}{3}\varepsilon_1(1-2\nu) \Rightarrow \frac{1}{3}\frac{\sigma_1}{E}(1-2\nu) = \alpha\frac{1}{3}\sigma_1 \Rightarrow \alpha = \frac{(1-2\nu)}{E} = \frac{(1-2\nu)}{2(1+\nu)G}.$$

ad3) $$\frac{\tau_I}{\gamma_I} = \frac{\tau_{II}}{\gamma_{II}} = \frac{\tau_{III}}{\gamma_{III}} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)}{\varepsilon_1-\varepsilon_2} = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_3)}{\varepsilon_2-\varepsilon_3} = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)}{\varepsilon_1-\varepsilon_3} = H.$$

ad4) $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$, kde $\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2}$,

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1-\varepsilon_3)^2}.$$

TEORIE MALÝCH PRUŽNĚ PLASTICKÝCH DEFORMACÍ

Dosadíme-li z 3) do 4)

$$\sigma_i = \sqrt{2}H\sqrt{\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)^2+\left(\varepsilon_2-\varepsilon_3\right)^2+\left(\varepsilon_1-\varepsilon_3\right)^2}, \quad \sigma_i = 3H\varepsilon_i \Rightarrow H = \frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}.$$

Po mnoha algebraických úpravách a po zavedení funkce plasticity φ

$1+\varphi = 3G\dfrac{\varepsilon_i}{\sigma_i}$, dostaneme vztahy mezi napětími a přetvořeními:

$\varepsilon_1 = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu\left(\sigma_2+\sigma_3\right)\right] + \dfrac{\varphi}{3G}\left[\sigma_1 - \dfrac{1}{2}\left(\sigma_2+\sigma_3\right)\right]$, analogicky pro ε_2 a ε_3,

$\gamma_I = \dfrac{1+\varphi}{G}\tau_I$, analogicky pro γ_{II} a γ_{III}. Použijme 1) větu:

$\varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y+\sigma_z\right)\right] + \dfrac{\varphi}{3G}\left[\sigma_x - \dfrac{1}{2}\left(\sigma_y+\sigma_z\right)\right]$, analogicky pro ε_y a ε_z,

$\gamma_x = \dfrac{1+\varphi}{G}\tau_x$, analogicky pro γ_y a γ_z.

TEORIE MALÝCH PRUŽNĚ PLASTICKÝCH DEFORMACÍ

- Při rozvinutých plastických deformacích lze zanedbat pružnou změnu objemu a tedy předpokládat nestlačitelný materiál. Z toho vyplývá ε_s=0 a ν=0,5 a dále E=3G. Pak vztahy mezi napětími a přetvořeními budou:

$$\varepsilon_x = \frac{1+\varphi}{3G}\left[\sigma_x - \frac{1}{2}\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right], \qquad \gamma_x = \frac{1+\varphi}{G}\tau_x,$$

$$\varepsilon_y = \frac{1+\varphi}{3G}\left[\sigma_y - \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right], \qquad \gamma_y = \frac{1+\varphi}{G}\tau_y,$$

$$\varepsilon_z = \frac{1+\varphi}{3G}\left[\sigma_z - \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right], \qquad \gamma_z = \frac{1+\varphi}{G}\tau_z.$$

$ad\,5)$ při pružném odlehčování platí $\sigma_i = \beta\varepsilon_i$, kde

$$\beta = \frac{3E}{2\left(1+\nu\right)} = 3G.$$

TENZOROVÁ FORMULACE TEORIÍ PLASTICITY

- Předpokládá, že platí lineární závislost:

$$HD_\sigma + K\dot{D}_\sigma = LD_\varepsilon + M\dot{D}_\varepsilon, \quad \text{kde:}$$

D_σ je deviátor napětí a $\dot{D}_\sigma = \dfrac{dD_\sigma}{dt}$, D_ε je deviátor přetvoření a $\dot{D}_\varepsilon = \dfrac{dD_\varepsilon}{dt}$.

Pro teorii malých pružně plastických deformací je tenzorový tvar:

$$\frac{1}{\sqrt{J_2\left(D_\sigma\right)}} D_\sigma = \frac{1}{\sqrt{J_2\left(D_\varepsilon\right)}} D_\varepsilon, \quad H \frac{1}{\sqrt{J_2\left(D_\sigma\right)}}, K = 0, L = \frac{1}{\sqrt{J_2\left(D_\varepsilon\right)}}, M = 0,$$

$$\sqrt{J_2\left(D_\sigma\right)} = \frac{\sigma_i}{\sqrt{3}}, \sqrt{J_2\left(D_\varepsilon\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_i.$$

PRANDTLOVA – REUSSOVA TEORIE

$$H = \frac{3}{2\sigma_k^2}\left[\left(\sigma_x - \sigma_s\right)\dot{\varepsilon}_x + \left(\sigma_y - \sigma_s\right)\dot{\varepsilon}_y + \left(\sigma_z - \sigma_s\right)\dot{\varepsilon}_z + 2\left(\tau_x\dot{\gamma}_x + \tau_y\dot{\gamma}_y + \tau_z\dot{\gamma}_z\right)\right],$$

$$K = 2G, L = 0, M = 1.$$

Závěr:
Všechny teorie plasticity lze při prostém zatěžování převést na tvar

$$\frac{1}{\sqrt{J_2\left(D_\sigma\right)}}D_\sigma = \frac{1}{\sqrt{J_2\left(D_\varepsilon\right)}}D_\varepsilon.$$

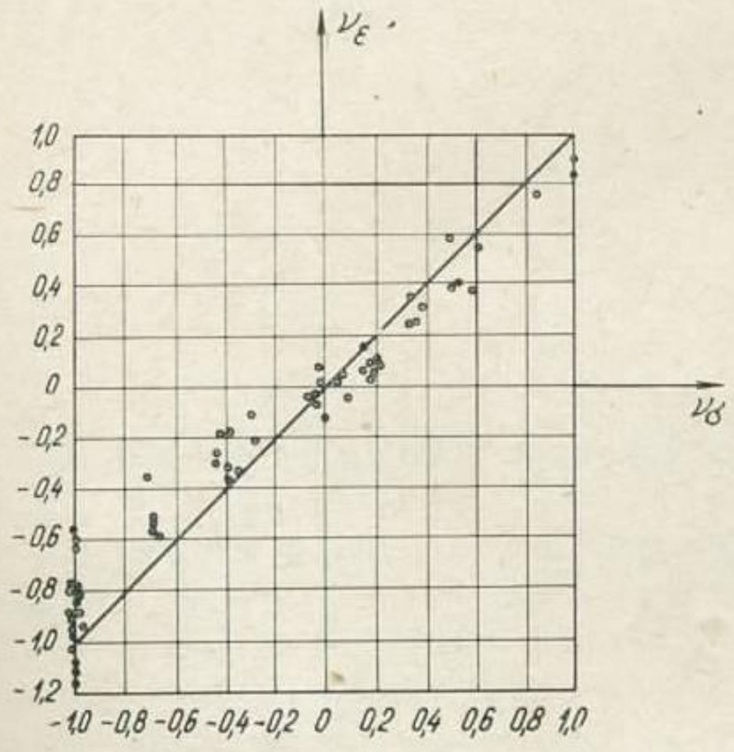
Závislost $\sigma_i = f\left(\varepsilon_i\right)$ dobře charakterisuje materiál a pro určení této závislosti slouží dobře tahový diagram.

Souosost deviátorů napětí a deformace je rovněž prokázána experimentálně.

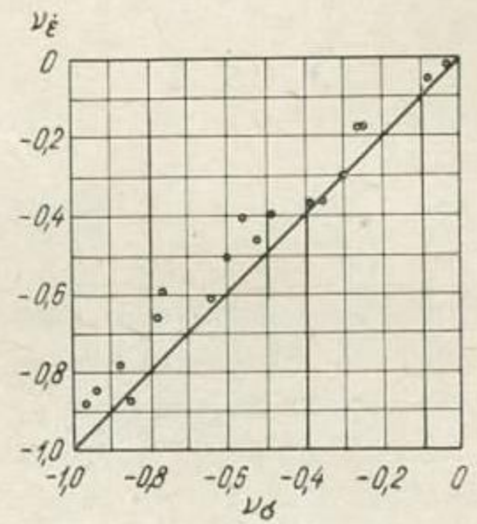
Lze odvodit vztahy (Lodeho parametry):

$$\frac{\sigma_2 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}} = \frac{\varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2}}{\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2}} \Rightarrow \nu_\sigma = \nu_\varepsilon, \qquad \dot{\nu}_\varepsilon = \frac{\dot{\varepsilon}_2 - \frac{\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_3}{2}}{\frac{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3}{2}}, \qquad \nu_\sigma = \dot{\nu}_\varepsilon$$

TAYLOR+QUINNEY



Obr. 7.1 Experimentální ověření závislosti
$\nu_\sigma = \nu_\varepsilon$



Obr. 7.2 Experimentální ověření závislosti
$\nu_\sigma = \nu_{\dot\varepsilon}$