

představuje gradient funkce $f(\{\sigma\})$, který má směr vnější normály \mathbf{n} k okamžité ploše zatěžování, $\dot{\sigma}$ a $\dot{\varepsilon}^p$ představují vektory rychlosti napětí a plastické deformace, $\dot{\psi}_i$ vyjadřují rychlosti změny historie zatěžování.

V souladu s rov. (7.3) bude na okamžité ploše zatěžování, kde je $f = 0$, také $\dot{f} = 0$. Potom lze na uzavřené ploše zatěžování pomocí vztahů (7.2) a (7.8) definovat následující kritéria zatěžování, která určují směr vektoru $\{\dot{\sigma}\} = \frac{d\{\sigma\}}{dt}$:

Pro $f + df < 0$ při $f = 0$, je $df = \dot{f} dt < 0$, tedy $\dot{f} < 0$. Nenastává-li změna plastické deformace ε^p , je $\dot{\varepsilon}^p = 0$ a $\dot{\psi}_i = 0$. V tomto případě dochází k odlehčování s podmínkou

$$\{\mathbf{F}\}^T \{\dot{\sigma}\} < 0 \quad (7.9)$$

a vektor $\dot{\sigma}$ vzhledem ke směru vektoru \mathbf{F} směřuje dovnitř plochy zatěžování.

Pro $f + df = 0$, $df = \dot{f} dt = 0$, tedy $\dot{f} = 0$, jestliže nenastává změna plastické deformace $\dot{\varepsilon}^p = 0$ a $\dot{\psi}_i = 0$, bude

$$\{\mathbf{F}\}^T \{\dot{\sigma}\} = 0 \quad (7.10)$$

V tomto případě je vektor $\dot{\sigma}$ tečný k ploše zatěžování a bod zatěžování se po ní posouvá. Tento stav se nazývá neutrální zatěžování.

V případě $f + df = 0$, $f = 0$, $df = \dot{f} dt = 0$ a tedy $\dot{f} = 0$, kdy zatěžování je provázáno změnou plastické deformace $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$ a $\dot{\psi}_i \neq 0$, dochází k zatěžování s podmínkou

$$\{\mathbf{F}\}^T \{\dot{\sigma}\} > 0 \quad (7.11)$$

Zde vektor $\dot{\sigma}$ směřuje vně plochy zatěžování. Tím okamžitou plochu zatěžování deformuje, posouvá nebo deformuje a posouvá. Musí tedy být součet dvou posledních členů v rovnici (7.8) menší jak nula. Podle vztahů (7.10) a (7.11) je při zatěžování součin gradientu funkce zatěžování \mathbf{F} a vektoru rychlosti napětí $\dot{\sigma}$ v bodě zatěžování nezáporný, tedy

$$\{\mathbf{F}\}^T \{\dot{\sigma}\} \geq 0 \quad (7.12)$$

Ze skalárního součinu dvou vektorů pak vyplývá, že úhel α mezi těmito vektory je pravý nebo ostrý, obr. 7.5.

7.3 Obecný tvar počáteční podmínky plasticity

V lineárně pružném stavu, kdy platí Hookeův zákon, jsou složky vektoru deformace ε jednoznačně určeny složkami vektoru napětí σ . Podmínku pružného stavu při jednoosé napjatosti s napětím σ lze jednoduše vyjádřit vztahem

$$|\sigma| - \sigma_K < 0 \quad (7.13)$$

kde σ_K je mez kluzu materiálu při dané teplotě. Pro tento případ lze potom přechod do plastického stavu vyjádřit podmínkou plasticity ve tvaru

$$f(\sigma, \sigma_K) = |\sigma| - \sigma_K = 0, \quad (7.14)$$

kde f je funkce plasticity.

Analogicky lze počáteční podmínku plasticity vyjádřit pro obecnou napjatost vyjádřenou vektorem napětí σ a materiál, jehož odpovídající vlastnosti lze vyjádřit potřebným počtem konstant $m_j = 1, 2, \dots, n$. Potom bude

$$f(\{\sigma\}, m_j) = 0, \quad (7.15)$$

kde f je opět funkcí plasticity

Jednodušeji lze vektor napětí σ vyjádřit pomocí tří složek hlavních napětí $\{\sigma\} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]^T$. Jestliže materiál zůstane izotropní i v pružně plastickém stavu, zůstanou směry hlavních napětí a hlavních os deformace totožné a podmínka plasticity není ovlivněna. Potom ji lze zapsat ve tvaru

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, m_j) = 0. \quad (7.16)$$

Zcela analogicky lze podmínku plasticity vyjádřit pomocí invariantů tenzoru napětí $I_i(T_\sigma)$, $i = 1, 2, 3$. Rovnice (7.16) znázorňuje v prostoru hlavních napětí se souřadnicemi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ plochu. Vyjadřuje-li tato rovnice podmínku vzniku plastického stavu, je plocha v prostoru fixována co do velikosti, polohy i tvaru, mluvíme o počáteční podmínce a ploše plasticity. Ta také popisuje vznik a rozvoj plastického stavu u tzv. ideálně pružně plastického materiálu bez zpevnění (odst. 5.4.1).

Z hlediska vlastností materiálů existují dva jejich typy:

- Materiály, kde plastický stav není ovlivňován středním napětím σ_s , např. kovy
- Materiály, kde se vliv středního napětí σ_s projeví (sypké materiály, zeminy apod.)

Zabývejme se v dalším prvou skupinou. Potom lze funkci plasticity vyjádřit pomocí složek deviátoru napětí $s_i = \sigma_i - \sigma_s$, kde $i = 1, 2, 3$ ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ jsou hlavní napětí). Za předpokladu izotropie bude

$$f(s_1, s_2, s_3, m_j) = 0. \quad (7.16a)$$

V tomto případě vyjadřuje podmínka plasticity (rov. 7.16a) v prostoru hlavních napětí $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ válcovou plochu s osou $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Osa prochází počátkem. Na tuto osu je kolmá tzv. deviátorová rovina, kde $\sigma_s = 0$, obr. 7.6.

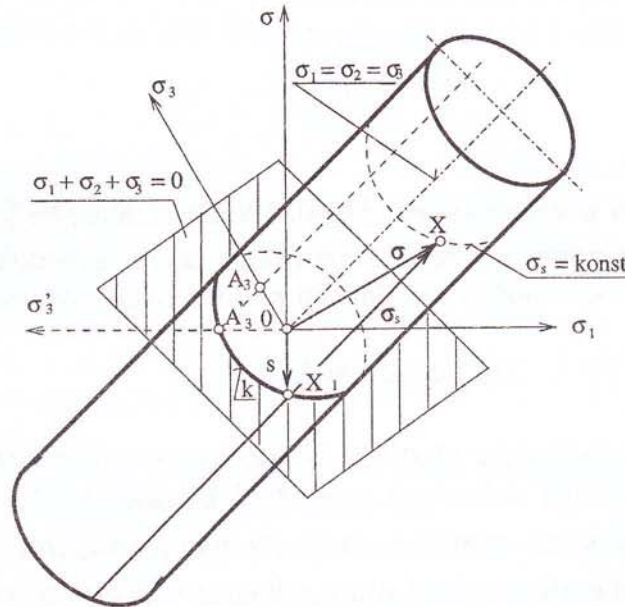
Vektor $\{\sigma\} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]^T$ vyjádřený pomocí hlavních napětí lze rozložit na vektor středních napětí $\{\sigma_s\} = \sigma_s [\mathbf{I}]$, kde $[\mathbf{I}] = [1, 1, 1]^T$ je jednotkový vektor, a na vektor složek deviátoru napětí

$$\{\mathbf{s}\} = [(\sigma_1 - \sigma_s), (\sigma_2 - \sigma_s), (\sigma_3 - \sigma_s)]^T. \quad (7.17)$$

Potom bude

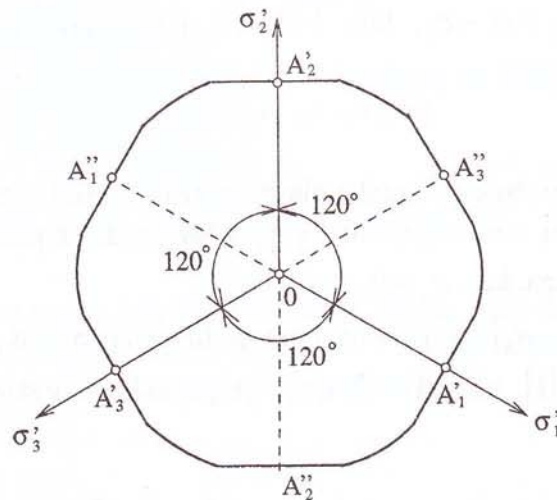
$$\sigma = \sigma_s + s \quad (7.18)$$

Rozklad je zřejmý z obrázku 7.6. Odtud je zřejmé, že vektor s je průmětem všech vektorů σ jejichž koncový bod X leží na jedné povrchové přímce (zde $X_1 X$) válcové plochy plasticity. Podmínka plasticity tudíž nezávisí na středním napětí σ_s , a koncové body X_1 vektorů deviatorů napětí, které splňují podmínku plasticity, leží na křivce plasticity (mezne křivce) k , která je průsečnicí deviatorové roviny s plochou plasticity.



Obr. 7.6

V případě izotropních materiálů lze indexy $i = 1, 2, 3$ osám systému souřadnic přiřadit zcela libovolně. Proto uzavřená křivka plasticity k musí mít tři osy souměrnosti, obr. 7.7, ale mez kluzu v tahu a v tlaku nemusí být stejná. Je-li např. bod A_3 průsečíkem osy σ_3 s plochou plasticity (obr. 7.6), určuje bod A_3' spolu s počátkem soustavy souřadnic O průmět σ_3' hlavního napětí σ_3 do deviatorové roviny. Obdobně pro osy σ_1 a σ_2 . Pro stejné meze kluzu v tahu σ_{K_t} a v tlaku σ_{K_d} musí být $OA_1' = OA_1''$ a obdobně pro zbývající osy, obr. 7.7.



Obr. 7.7

Na základě obecných požadavků byl tvar plochy plasticity dostatečně určen. Zbývá ještě určit její rozměry. To lze provést např. pomocí jednoosé napjatosti, na kterou lze pohlížet jako na zvláštní případ napjatosti prostorové, jak již bylo uvedeno v odstavci 7.1. V tomto případě nastane plastický stav, dosáhne-li působící napětí σ_1 hodnoty odpovídající mezi plasticity, za kterou je považována mez kluzu σ_K , tj. $\sigma_1 = \sigma_K$.

7.4 Trescova podmínka plasticity

Na základě výsledků experimentů, které prováděl Tresca, vyslovil Saint-Venant předpoklad, že o vzniku a rozvoji plastického stavu rozhoduje maximální smykové napětí. Tuto podmínku lze zapsat ve tvaru

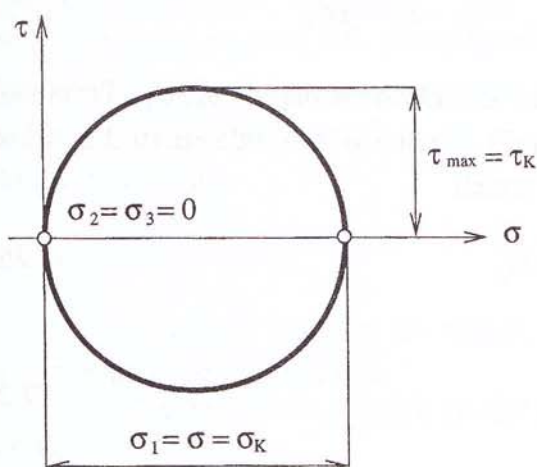
$$\tau_{\max} = \tau_K \quad (7.19)$$

kde τ_K je kritická hodnota tohoto maximálního napětí, která závisí na materiálu a teplotě. Tuto hodnotu lze určit z jednoosé napjatosti, která je zvláštním případem napjatosti prostorové, kde např. $\sigma_1 = \sigma \neq 0$ a $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, jak již bylo zmíněno. Mohrův diagram této napjatosti je na obr. 7.8. Při jednoosé napjatosti dojde ke vzniku plastického stavu, dosáhne-li meze plasticity, tedy při $\sigma = \sigma_K$, kde σ_K je mez kluzu. Je předpokládáno, že počáteční mez kluzu v tahu a v tlaku jsou stejné $\sigma_{K_t} = \sigma_{K_d} = \sigma_K$. To potvrdil experiment. Z obr. 7.8 potom pro uvažovaný případ vyplývá

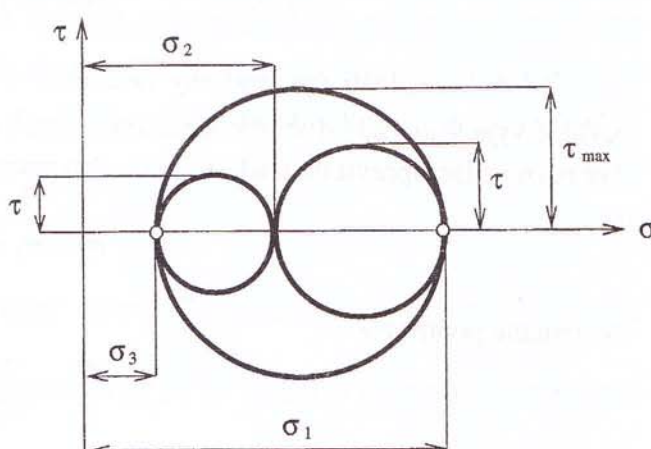
$$\tau_K = \frac{\sigma_K}{2}, \quad (7.20)$$

neboť lze předpokládat, že dosáhne-li normálové napětí meze plasticity, dosáhne jí současně i maximální smykové napětí. Dosazením do rov. (7.19) bude

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_K}{2}. \quad (7.21)$$



Obr. 7.8



Obr. 7.9

Je-li pro prostorovou napjatost známa relace hlavních napětí $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, lze podmínku plasticity vyjádřit velice jednoduše (obr. 7.9).

Potom $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$. Po dosazení do rov. (7.21) a úpravě bude

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_K \quad (7.22)$$

Jestliže uvedená podmínka není splněna, je situace složitější. V tomto případě, když zahrneme i oblast tlakových napětí, musí být splněna jedna ze šesti podmínek

$$|\sigma_1 - \sigma_3| = \sigma_K, \quad |\sigma_2 - \sigma_3| = \sigma_K, \quad |\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_K \quad (7.23a)$$

Ty lze přepsat do tvaru

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \pm \sigma_K, \quad \sigma_2 - \sigma_3 = \pm \sigma_K, \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_K, \quad (7.23)$$

neboť rozdíly hlavních napětí mohou být kladné nebo záporné. Podmínky plasticity (7.23) lze vyjádřit jednou rovnicí ve tvaru

$$\left[(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - \sigma_K^2 \right] \left[(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \sigma_K^2 \right] \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_K^2 \right] = 0 \quad (7.24)$$

Ta je však velice složitá.

Soustava šesti rovnic (7.23) vyjadřuje v prostoru hlavních napětí $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ šestiboký hranol s osou totožnou s osou prvního oktantu, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, a vždy dvěma povrchovými plochami rovnoběžnými. Je tudíž podle této podmínky plasticity plochou plasticity šestiboký hranol.

Uvažujme o rovinné napjatosti např. $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$. V tomto případě dostaneme tzv. mezní čáru, která je totožná s řezem rovinnou $\sigma_3 = 0$ s uvedeným hranolem. Po dosazení do rov. (7.23) dostaneme

$$\sigma_1 = \pm \sigma_K, \quad \sigma_2 = \pm \sigma_K, \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_K \quad (7.25)$$

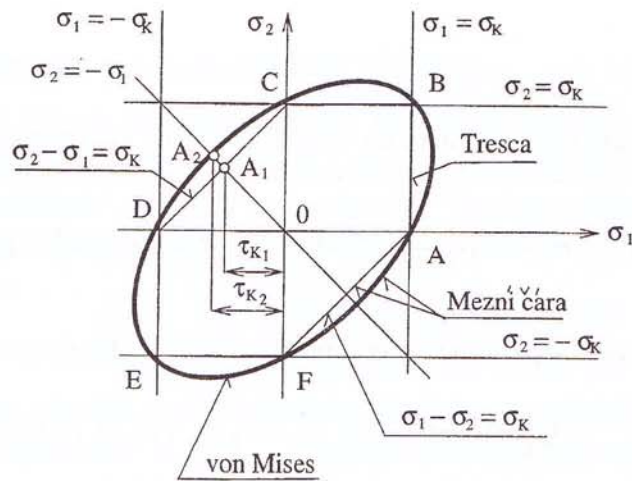
Tyto závislosti lze graficky znázornit v rovině hlavních napětí σ_1, σ_2 . První čtyři rovnice vyjadřují vždy dvě přímky rovnoběžné s osou σ_1 nebo σ_2 ve vzdálenosti $\pm \sigma_K$. Třetí dvě rovnice lze upravit na úsekový tvar. Pro první z nich

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_K \quad (7.26a)$$

dostaneme po úpravě

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_K} - \frac{\sigma_2}{\sigma_K} = 1 \quad (7.26)$$

Rov. (7.26) je rovnicí přímky, která na ose σ_1 vytíná úsek $+\sigma_K$ a na ose σ_2 úsek $-\sigma_K$. Obdobně pro druhou rovnici této skupiny. Mezní čarou je potom šestiúhelník, obr. 7.10.



Obr. 7.10

7.5 Energetická podmínka plasticity

Tato podmínka plasticity je v literatuře uváděna také jako podmínka efektivního napětí, oktaedrická nebo von Misesova, HMM (Huber, Mises, Hencky). Jak ukázaly pokusy, má kulový tenzor (napjatost na změnu objemu) zanedbatelný vliv na vznik plastických deformací u materiálů, jejichž vlastnosti se v procesu deformace nemění se středním napětím. Proto uvedení autoři vyslovili předpoklad, že počátku plastického stavu je dosaženo, jestliže hustota deformační energie na změnu tvaru dosáhne kritické hodnoty. To lze zapsat ve tvaru

$$\lambda_{tv} = \lambda_{tv_k} \quad (7.27)$$

Po dosažení z rovnice (6.20) bude pro obecnou prostorovou napjatost

$$\frac{1+\mu}{3E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + 3(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)] = \lambda_{tv_k} \quad (7.28)$$

nebo v souladu s rovnicí (6.21)

$$\frac{1+\mu}{3E} \sigma_i^2 = \lambda_{tv_k} \quad (7.29)$$

Kritickou hodnotu hustoty deformační energie na změnu tvaru lze potom opět určit pomocí jednoosé napjatosti (viz předchozí odstavec). Potom např. pro $\sigma_x = \sigma_1 = \sigma \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, plastický stav vznikne, když působící napětí σ dosáhne meze plasticity $\sigma = \sigma_K$. Potom např. z rovnice (7.29) s uvážením, že efektivní napětí při jednoosé napjatosti je rovno působícímu napětí $\sigma_i = \sigma$, bude na mezi plasticity $\sigma_i = \sigma_K$. Po dosažení do rov. (7.29) bude

$$\lambda_{tv_k} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_K^2 \quad (7.30)$$

Ke stejnému výsledku lze dospět, když v rov. (7.28) položíme $\sigma_x = \sigma_K$ a ostatní složky napětí budou rovné nule.

Po dosažení z rov. (7.28) a (7.30) do rov. (7.27) a po vydělení konstantou dostaneme vztahy

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + 3(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) = \sigma_K^2 \quad (7.31)$$

nebo

$$\sigma_i = \sigma_K. \quad (7.32)$$

Poslední rovnici lze s ohledem na vztah (3.31) a (3.31a) zapsat také ve tvaru

$$\frac{\sqrt{2}}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2)]^{1/2} = \sigma_K. \quad (7.33)$$

Pomocí hlavních napětí bude podmínka plasticity s ohledem na rov. (7.31) ve tvaru

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) = \sigma_K^2. \quad (7.34)$$

Rovnice (7.34) vyjadřuje mezní plochu plasticity, která je v tomto případě v prostoru hlavních napětí $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ válcovou plochou s osou $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Ta je obálkou šestibokého hranolu vyjadřujícího mezní plochu plasticity podle Trescovy podmínky plasticity.

Pro případ rovinné napjatosti $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$ bude

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_K^2 \quad (7.35)$$

V tomto případě je mezní křivkou elipsa, která má s mezní křivkou podle Trescovy podmínky společné body A, C, D, F , kdy se jedná o jednoosou napjatost a B, E , kdy $\sigma_1 = \sigma_2$, obr. 7.10.

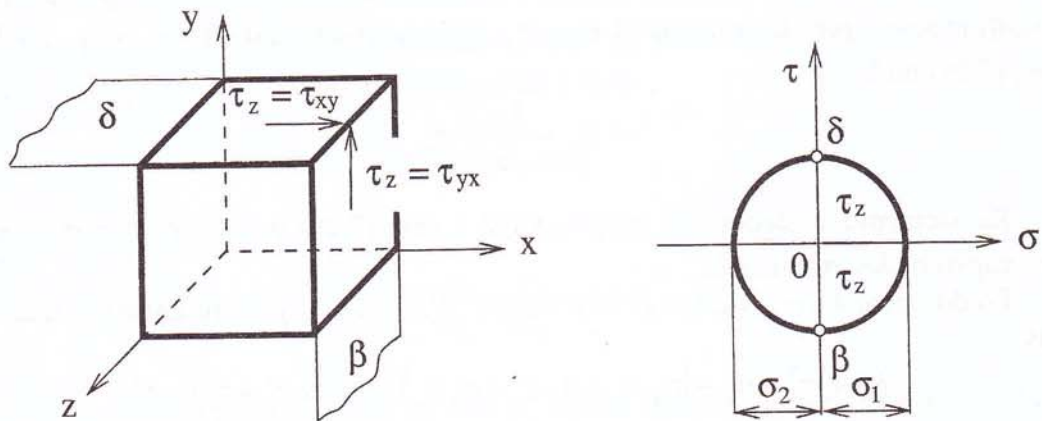
V případě energetické podmínky plasticity je tato podmínka vyjádřena jedinou rovnicí, která má spojité derivace podle složek napětí. Její tvar je však složitější v porovnání se vztahem (7.22), kdy u Trescovy podmínky byla známa relace hlavních napětí.

7.6 Porovnání obou podmínek plasticity

Uvažujme napjatost čistého smyku, obr. 7.11, kde je uveden i Mohrův diagram. Pro ni platí

$$\sigma_1 = \tau_z, \quad \sigma_2 = -\sigma_1, \quad \sigma_3 = 0 \quad (7.36)$$

Tato napjatost je v diagramu na obr. 7.10 reprezentována přímkou procházející druhým a čtvrtým kvadrantem pod úhlem 45° vůči ose σ_2 . Ta protne mezní křivky podle uvedených



Obr. 7.11

podmínek plasticity v bodech A_1, A_2 . Z rovnice (7.21) když $\tau_{\max} = \tau_K$, lze určit $\tau_{K_1} = 0,5\sigma_K$. Dosazením do rov. (7.35) za $\sigma_1 = \tau_K, \sigma_2 = -\tau_K$ dostaneme $\tau_{K_2} = \sigma_K / \sqrt{3}$. Z uvedeného rozboru vyplývá, že hodnoty kritického smykového napětí (meze kluzu ve smyku) se při použití uvedených podmínek plasticity od sebe liší. Experimentálně získané výsledky ukázaly, že hodnota meze kluzu ve smyku leží mezi těmito hodnotami

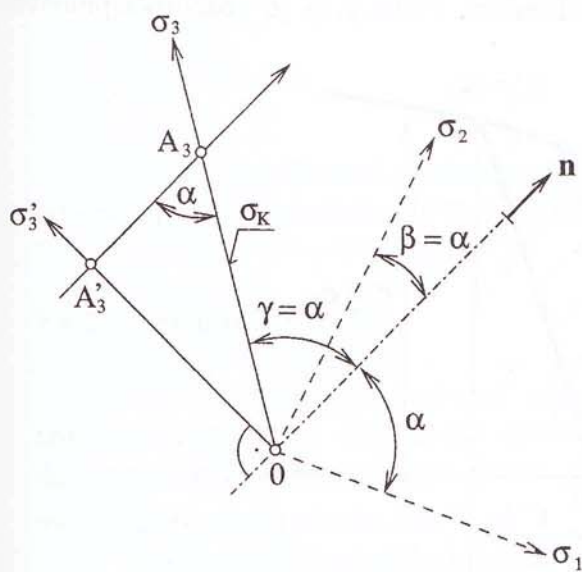
$$0,5\sigma_K < \tau_K < 0,58\sigma_K = \sigma_K / \sqrt{3} \quad (7.37)$$

Jak již bylo uvedeno, shodují se obě podmínky plasticity pro případ jednoosé napjatosti v tahu nebo tlaku a pro případ, kdy $\sigma_1 = \sigma_2$. Trescova podmínka neuvažuje vliv prostředního hlavního napětí, oproti energetické podmínce, která uvažuje vliv všech složek napětí. Obě dobře vyhovují pro měkké materiály (ocel s nízkým obsahem uhlíku, měď apod.). Experimentální výsledky ukazují, že skutečný stav leží mezi těmito dvěma řešeními.

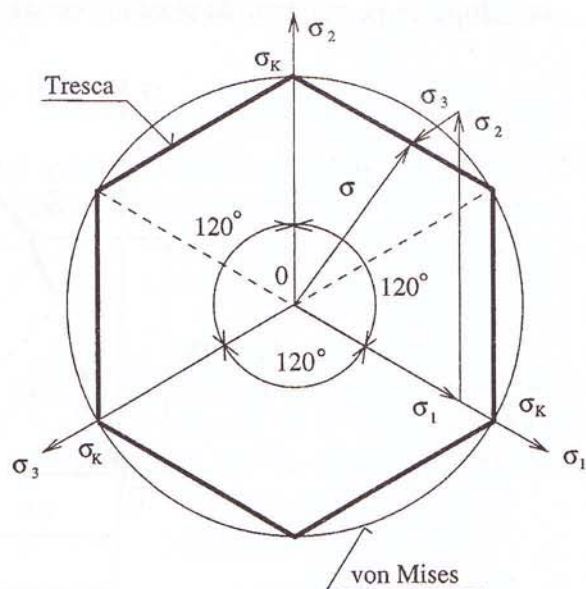
7.7 Mezní křivky v deviátorové rovině

Na základě definice deviátorové roviny dostaneme toto znázornění jako axonometrický průmět ploch plasticity do deviátorové roviny. To odpovídá pohledu na mezní plochy ve směru osy obou ploch $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ v soustavě souřadnic $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Při tomto zobrazení dostaneme pro Trescovu podmínku pravidelný šestiúhelník a pro energetickou podmínku kružnici, která jej opisuje. Uvažujme o pootočeném řezu plochou plasticity rovinou určenou osou mezní plochy ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) s odpovídajícím jednotkovým vektorem $\{\mathbf{n}\} = [n_1, n_2, n_3]^T$ a osou soustavy souřadnic σ_3 . Řezem je povrchová přímka $A'_3 A_3$, obr. 7.6 a 7.12. Pro jednotkový vektor normály deviátorové roviny (osu mezní plochy $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) platí $n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, neboť pro složky vektoru \mathbf{n} platí závislost

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 .$$



Obr. 7.12



Obr. 7.13

Z pravoúhlého trojúhelníka OA'_3A_3 , kde $\sigma_3 = OA_3 = \sigma_K$ (bod A_3 leží na ploše plasticity) neboť se jedná o jednoosou napjatost, kdy $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. $OA'_3 = \sigma'_K$ je průmět úsečky OA_3 do deviatorové roviny. Tedy platí

$$\sigma'_K = \sigma_K \sin \alpha . \quad (7.38)$$

Protože $n = \cos \alpha$, použijme pro vyjádření hodnoty funkce $\sin \alpha$ závislost

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 .$$

Odtud po dosazení za $\cos \alpha = 1/\sqrt{3}$ dostaneme po úpravě $\sin \alpha = \sqrt{2/3}$.

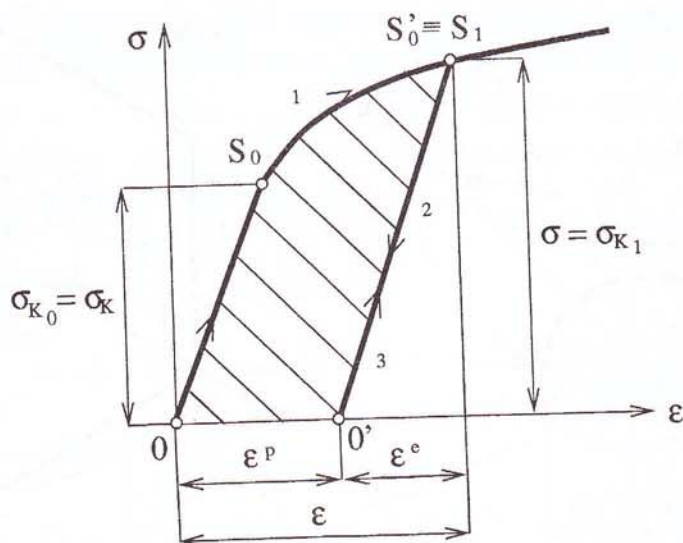
Po dosazení do rov. (7.38) bude

$$\sigma'_K = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \alpha \doteq 0,82 \sigma_K . \quad (7.39)$$

Bude tedy v deviatorové rovině průměr kružnice vyjadřující mezní křivku podle energetické podmínky plasticity $r = 0,82 \sigma_K$. Protože při průmětech do deviatorové roviny bude zkrácení všech úseček ležících na osách $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ve stejném poměru, lze diagram kreslit pro skutečná napětí. V obr. 7.13 je znázorněna vektorem $\{\sigma\} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]^T$ napjatost, která splňuje Trescovu podmínku plasticity.

7.8 Okamžité, následné podmínky plasticity

Předcházející úvahy se zabývaly prvotními podmínkami plasticity. Odtud také vyplynulo, že mezní plocha v tzv. Haighově prostoru hlavních napětí je šestiboký hranol v případě Trescovy a válec v případě energetické podmínky plasticity s osou totožnou s osou prvního oktantu. Zde zaměříme pozornost na tzv. okamžité nebo někdy také nazývané následné podmínky plasticity. Ty popisují vznik plastického stavu za různých režimů následujících po zatížení do plastického stavu a odlehčení. V obr. 7.14 je znázorněn pracovní



Obr. 7.14