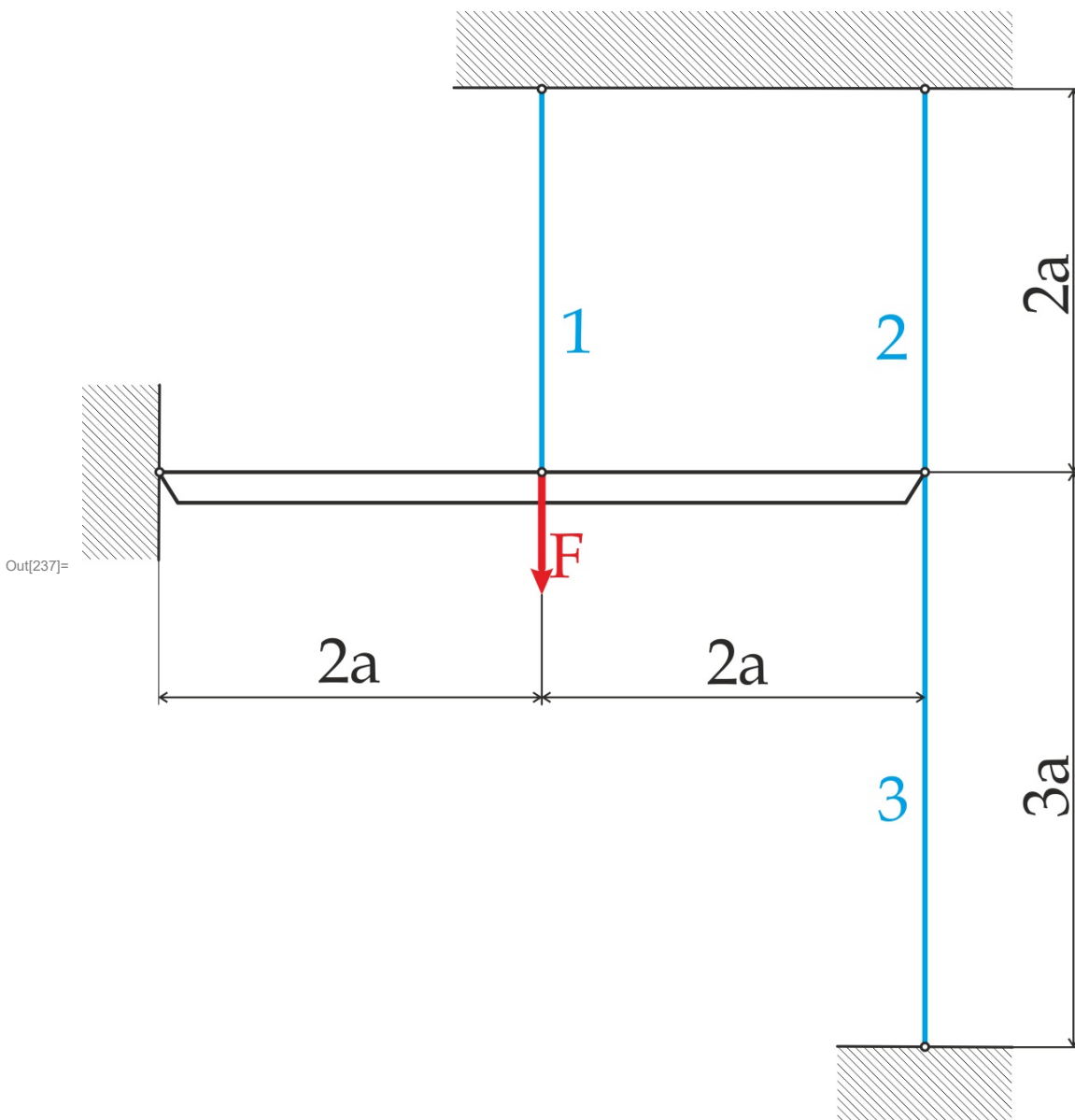


```
In[235]:= ClearAll["Global`*"];  
SetDirectory[NotebookDirectory[]];
```

# Prutová soustava v pružnoplastickém stavu

Zadání



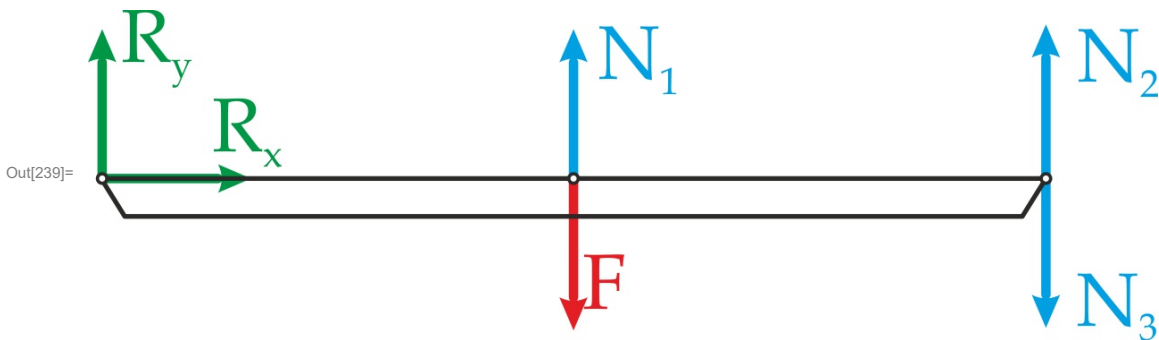
Popište napětí v prutech při růstu síly  $F$ . Určete zbytková napětí po odlehčení ze síly  $F_1 = \frac{FM_1 + FM_2}{2}$

In[238]:= `cisla = {a → 1, S → 10-4, E → 2.1 · 1011, σk → 200 · 106};`

## Řešení

### ■ Elastické řešení

#### Rovnice rovnováhy



In[240]:= `rrEx = Rx == 0;`  
`rrEy = Ry + N1 + N2 - F - N3 == 0;`  
`rrEM = 2 N1 - 2 F + 4 N2 - 4 N3 == 0;`

#### Fyzikální rovnice

In[243]:= `frE1 = Δ11 ==  $\frac{N1 \cdot 2 a}{E S}$ ;`  
`frE2 = Δ12 ==  $\frac{N2 \cdot 2 a}{E S}$ ;`  
`frE3 = Δ13 ==  $\frac{N3 \cdot 3 a}{E S}$ ;`

#### Deformační rovnice

In[246]:= `drE1 = 2 Δ11 == Δ12;`  
`drE2 = Δ13 == -Δ12;`

### Řešení soustavy s napětími jako neznámými

Místo sil dosadím napětí, tj  $N_i = S \sigma_i$

In[248]:= `soustavaE = {rrEx, rrEy, rrEM, frE1, frE2, frE3, drE1, drE2} /. {N1 → S σ1, N2 → S σ2, N3 → S σ3}`

Out[248]= `{Rx == 0, -F + Ry + S σ1 + S σ2 - S σ3 == 0, -2 F + 2 S σ1 + 4 S σ2 - 4 S σ3 == 0,`  
`Δ11 ==  $\frac{2 a \sigma_1}{E}$ , Δ12 ==  $\frac{2 a \sigma_2}{E}$ , Δ13 ==  $\frac{3 a \sigma_3}{E}$ , 2 Δ11 == Δ12, Δ13 == -Δ12}`

In[249]:= **reseniE = Solve[soustavaE, {σ1, σ2, σ3, Rx, Ry, Δ11, Δ12, Δ13}][[1]]**

$$\text{Out[249]= } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \rightarrow \frac{3 F}{23 S}, \sigma_2 \rightarrow \frac{6 F}{23 S}, \sigma_3 \rightarrow -\frac{4 F}{23 S}, Rx \rightarrow 0, \\ Ry \rightarrow \frac{10 F}{23}, \Delta_{11} \rightarrow \frac{6 a F}{23 S E}, \Delta_{12} \rightarrow \frac{12 a F}{23 S E}, \Delta_{13} \rightarrow -\frac{12 a F}{23 S E} \end{array} \right\}$$

## Určení největšího napětí a stanovení FE

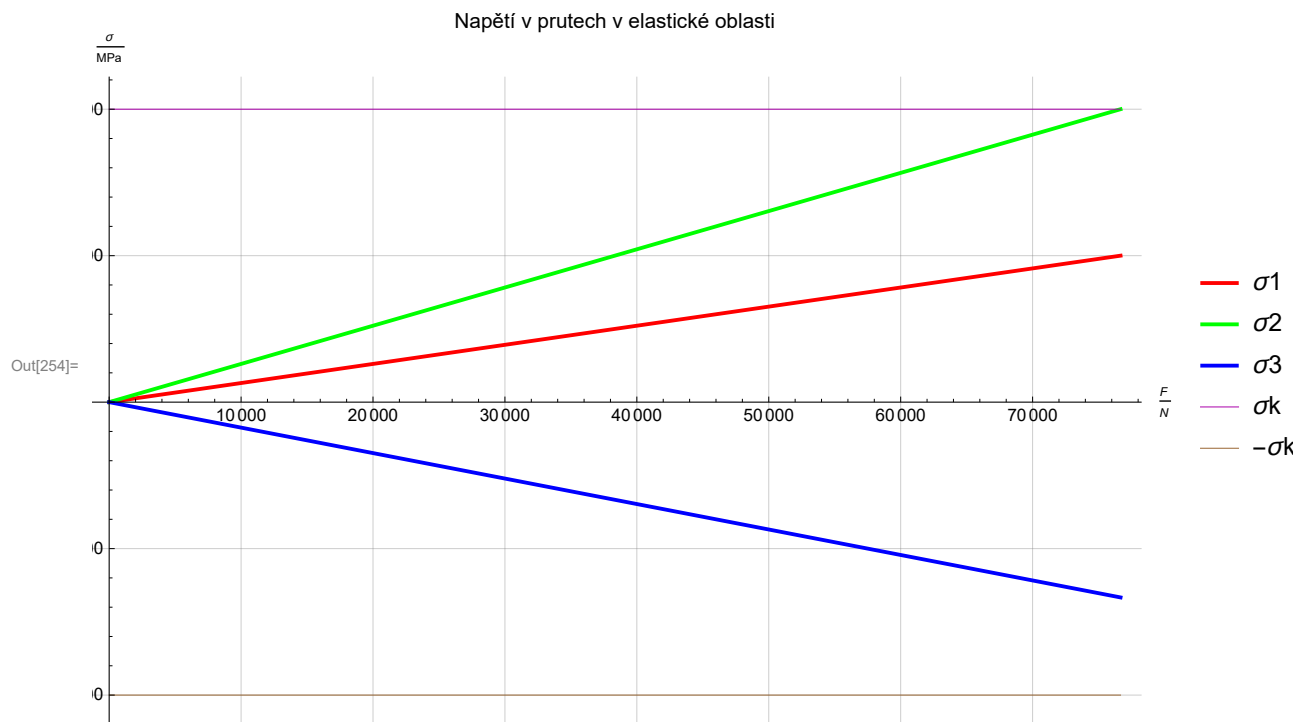
In[250]:= **napetiE = {σ1, σ2, σ3} /. reseniE**

$$\text{Out[250]= } \left\{ \frac{3 F}{23 S}, \frac{6 F}{23 S}, -\frac{4 F}{23 S} \right\}$$

Největší je evidentně napětí  $\sigma_2$ , určím FE:

In[251]:= **FE = F /. Solve[(σ2 /. reseniE) == σk, F][[1]]**

$$\text{Out[251]= } \frac{23 S \sigma_k}{6}$$



## ■ Elastoplastické řešení 1 ( $F > FE$ )

### Rovnice rovnováhy

In[255]:= **rrEP1x = Rx == 0;**  
**rrEP1y = Ry + N1 + N2 - F - N3 == 0;**  
**rrEP1M = 2 N1 - 2 F + 4 N2 - 4 N3 == 0;**

## Fyzikální rovnice

$$\begin{aligned} \text{In[258]}:= \text{frEP11} = \Delta 11 & == \frac{N1 \ 2 \ a}{E \ S}; \\ \text{frEP12} = \Delta 13 & == \frac{N3 \ 3 \ a}{E \ S}; \end{aligned}$$

## Deformační rovnice

$$\text{In[260]}:= \text{drEP1} = 2 \Delta 11 == -\Delta 13;$$

## Řešení soustavy s napětími jako neznámými

Za sílu N2 dosazují ( $S \sigma_k$ )!

$$\text{In[261]}:= \text{soustavaEP1} = \{ \text{rrEP1x}, \text{rrEP1y}, \text{rrEP1M}, \text{frEP11}, \text{frEP12}, \text{drEP1} \} /. \{ N1 \rightarrow S \sigma_1, N2 \rightarrow S \sigma_k, N3 \rightarrow S \sigma_3 \}$$

$$\text{Out[261]}= \left\{ \begin{aligned} R_x & == 0, -F + R_y + S \sigma_1 - S \sigma_3 + S \sigma_k == 0, \\ -2F + 2S \sigma_1 - 4S \sigma_3 + 4S \sigma_k & == 0, \Delta 11 == \frac{2a \sigma_1}{E}, \Delta 13 == \frac{3a \sigma_3}{E}, 2\Delta 11 == -\Delta 13 \end{aligned} \right\}$$

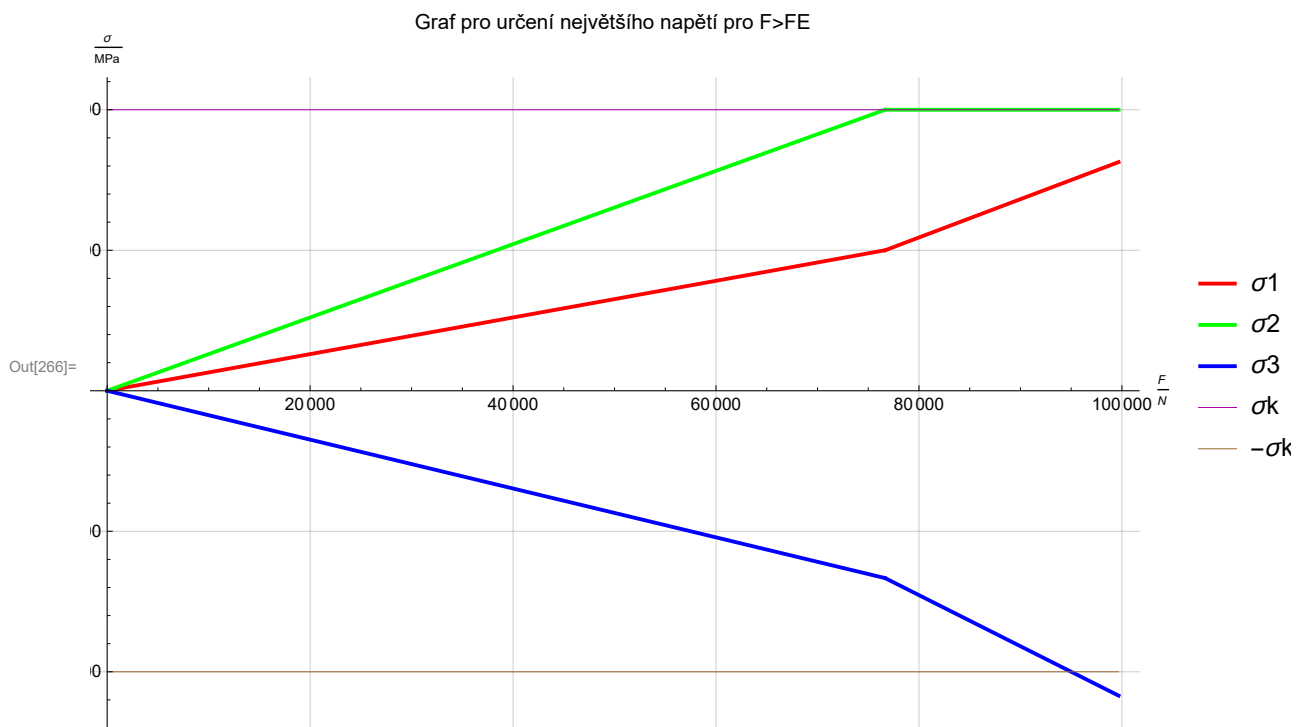
$$\text{In[262]}:= \text{reseniEP1} = \text{Solve}[\text{soustavaEP1}, \{ \sigma_1, \sigma_3, R_x, R_y, \Delta 11, \Delta 13 \}] [[1]]$$

$$\text{Out[262]}= \left\{ \begin{aligned} \sigma_1 & \rightarrow \frac{3(F - 2S \sigma_k)}{11S}, \sigma_3 \rightarrow -\frac{4(F - 2S \sigma_k)}{11S}, R_x \rightarrow 0, \\ R_y & \rightarrow \frac{1}{11}(4F + 3S \sigma_k), \Delta 11 \rightarrow -\frac{6a(-F + 2S \sigma_k)}{11SE}, \Delta 13 \rightarrow \frac{12a(-F + 2S \sigma_k)}{11SE} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{In[263]}:= \text{napetiEP1} = \{ \sigma_1, \sigma_k, \sigma_3 \} /. \text{reseniEP1}$$

$$\text{Out[263]}= \left\{ \frac{3(F - 2S \sigma_k)}{11S}, \sigma_k, -\frac{4(F - 2S \sigma_k)}{11S} \right\}$$

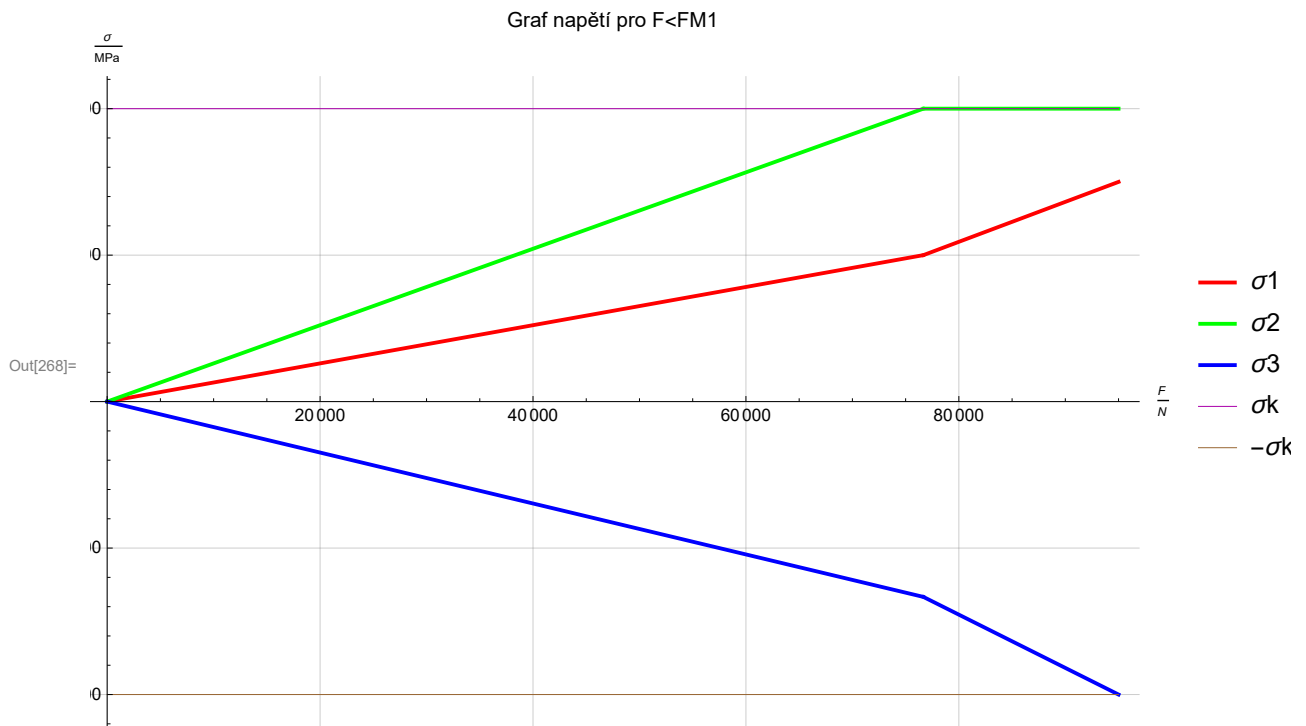
## Určení největšího napětí a stanovení FM1



Z grafu je zřejmé, že ze zbývajících dvou elastických prutů dosáhne nejprve prut číslo 3 napětí  $-\sigma_k$ .  
To umožní stanovit sílu FM1

$$\text{In[267]:= FM1 = F /. Solve}[\sigma_3 /. \text{reseniEP1} == -\sigma_k, F][[1]]$$

$$\text{Out[267]= } \frac{19.5 \sigma_k}{4}$$



## ■ Elastoplastické řešení 2 ( $F > FM1$ )

### Rovnice rovnováhy

```
In[269]:= rrEP2x = Rx == 0;
rrEP2y = Ry + N1 + N2 - F - N3 == 0;
rrEP2M = 2 N1 - 2 F + 4 N2 - 4 N3 == 0;
```

### Řešení soustavy s napětími jako neznámými

Za sílu  $N2$  dosazuji ( $S \sigma_k$ ), za sílu  $N3$  dosadím ( $-S \sigma_k$ )

```
In[272]:= soustavaEP2 = {rrEP2x, rrEP2y, rrEP2M} /. {N1 -> S σ1, N2 -> S σk, N3 -> -S σk}
```

```
Out[272]:= {Rx == 0, -F + Ry + S σ1 + 2 S σk == 0, -2 F + 2 S σ1 + 8 S σk == 0}
```

```
In[273]:= reseniEP2 = Solve[soustavaEP2, {σ1, Rx, Ry}][[1]]
```

```
Out[273]:= {σ1 -> - (F + 4 S σk) / S, Rx -> 0, Ry -> 2 S σk}
```

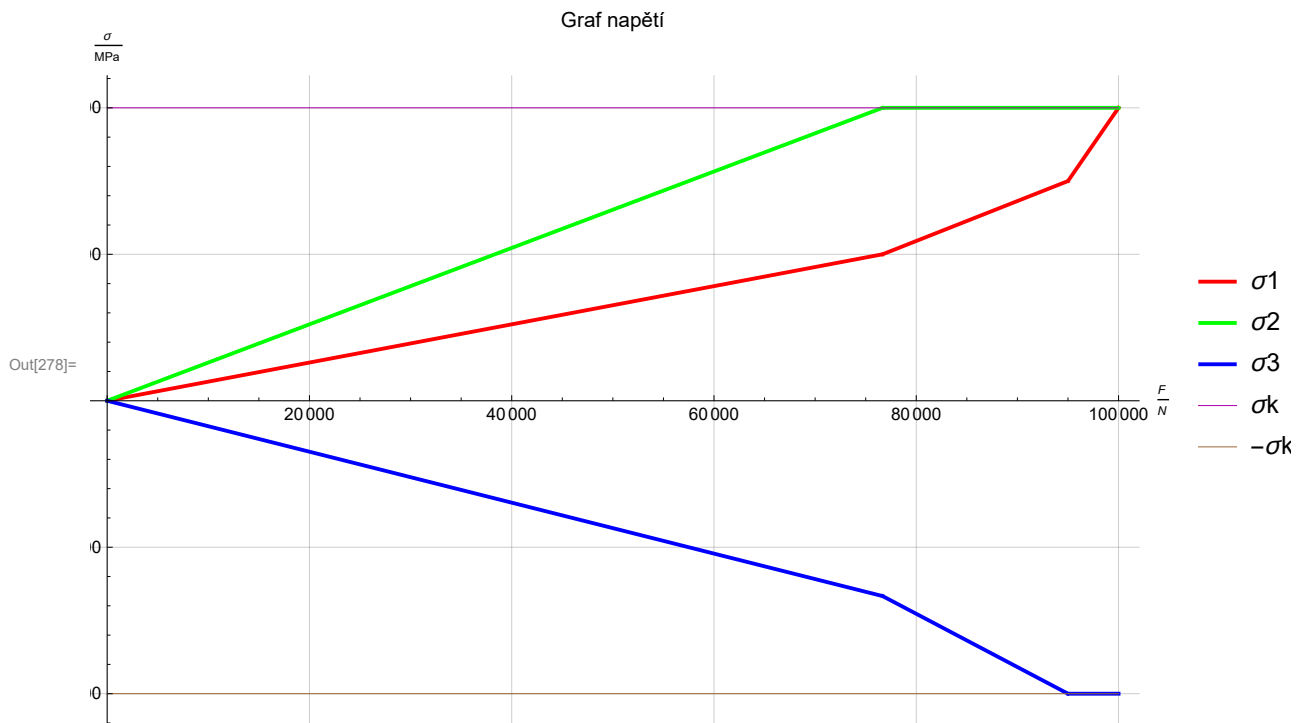
```
In[274]:= napetiEP2 = {σ1, σk, -σk} /. reseniEP2
```

```
Out[274]:= {- (F + 4 S σk) / S, σk, -σk}
```

## Stanovení FM2

In[275]:= **FM2 = F /. Solve[( $\sigma_1$  /. reseniEP2) ==  $\sigma_k$ , F][[1]]**

Out[275]= 5 S  $\sigma_k$



## ■ Odlehčení

Síla F1

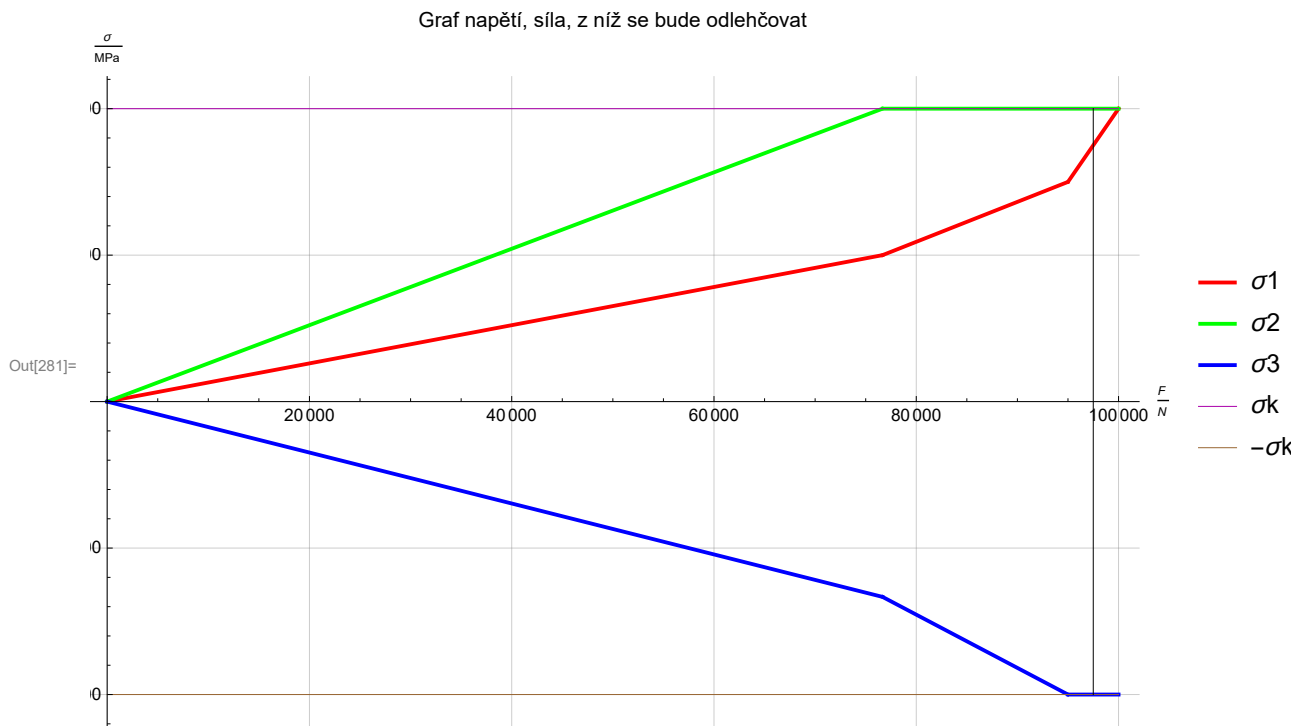
In[279]:= **F1 =  $\frac{FM1 + FM2}{2}$**

Out[279]=  $\frac{39 S \sigma_k}{8}$

Hodnoty napětí, z nichž se bude odlehčovat

In[280]:= **konec = napetiEP2 /. F → F1**

Out[280]=  $\left\{ \frac{7 \sigma_k}{8}, \sigma_k, -\sigma_k \right\}$



Určíme směrnice čar v elastické oblasti grafu

In[282]:= **smernice = napetiE / F**

Out[282]:=  $\left\{ \frac{3}{23 S}, \frac{6}{23 S}, -\frac{4}{23 S} \right\}$

Při odlehčování se pohybujeme po těchto směrnících. Rovnice odpovídajících přímek tedy jsou tyto.

In[283]:= **σ1odl = smernice[[1]] F + σ1zb**

**σ2odl = smernice[[2]] F + σ2zb**

**σ3odl = smernice[[3]] F + σ3zb**

Out[283]:=  $\frac{3 F}{23 S} + \sigma_{1zb}$

Out[284]:=  $\frac{6 F}{23 S} + \sigma_{2zb}$

Out[285]:=  $-\frac{4 F}{23 S} + \sigma_{3zb}$

Zbytková napětí musíme určit tak, aby přímky procházely body odpovídajícími síle F1

In[323]:= **zbykova = {Solve[σ1odl == konec[[1]], σ1zb][[1, 1]],**

**Solve[σ2odl == konec[[2]], σ2zb][[1, 1]],**

**Solve[σ3odl == konec[[3]], σ3zb][[1, 1]]}**

Out[323]:=  $\left\{ \sigma_{1zb} \rightarrow \frac{-24 F + 161 S \sigma_k}{184 S}, \sigma_{2zb} \rightarrow \frac{-6 F + 23 S \sigma_k}{23 S}, \sigma_{3zb} \rightarrow \frac{4 F - 23 S \sigma_k}{23 S} \right\}$

In[324]:= **σzb = {σ1zb, σ2zb, σ3zb} /. zbykova /. F -> F1**

Out[324]:=  $\left\{ \frac{11 \sigma_k}{46}, -\frac{25 \sigma_k}{92}, -\frac{7 \sigma_k}{46} \right\}$



